

Aproximaciones, Desarrollos y Funciones Especiales

Título: Bases Locales para Espacios Refinables Multivariados

Autores: Carlos Cabrelli, Sigrid Heineken y Ursula Molter

Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Sea $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de soporte compacto que satisface una ecuación de refinamiento de la forma

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \Lambda} c_k \varphi(Ax - k), \quad c_k \in \mathbb{C},$$

donde Λ es un subconjunto finito de un reticulado $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ y A es una matriz de dilatación. Recientemente hemos probado que, bajo la hipótesis de independencia lineal de las translaciones en Γ de φ , existe una correspondencia entre los vectores de la base de Jordan (asociados a autovalores no nulos) de una sub-matriz finita de $L = [c_{Ai-j}]_{i,j \in \Gamma}$ y un subespacio \mathcal{H} de $S(\varphi)$, el espacio invariante por translaciones generado por φ .

En esta comunicación completamos este resultado, demostrando que la dimensión de \mathcal{H} coincide con la *dimensión local* de $S(\varphi)$ y por lo tanto, cada función de $S(\varphi)$ se puede escribir (localmente) como combinación lineal de translaciones de funciones en \mathcal{H} . ([CHM03, CHM04]).

REFERENCIAS

- [CHM03] C. A. Cabrelli, S. B. Heineken, and U. Molter, *Local bases for refinable spaces*, preprint, August 2003.
- [CHM04] ———, *Refinable shift invariant spaces in R^n* , International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing . Special issue on “Sampling and Frames in Wavelet Theory and Time-Frequency Analysis” (2004), In Press.

Título: Caracterización de Funciones en Espacios de Muestreo
Autores: Cristina Blanco, Carlos Cabrelli, Sigrid Heineken.
Lugar: Depto. de Matemática-FCEyN-UBA

La teoría del muestreo clásicamente se desarrolló en el espacio de funciones de banda limitada, (el espacio de Paley-Wiener). Nuevas aplicaciones muestran que la hipótesis de banda limitada es muy restrictiva.

Recientemente la teoría fue extendida a espacios invariantes por translaciones enteras con un generador cuyas translaciones constituyen un marco del espacio. Mas precisamente:

Un subespacio cerrado V en $L^2(\mathbb{R})$ se denomina un "Espacio de Muestreo" si existe $\psi \in V$ tal que :

- (1) La familia $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forma un marco de V .
- (2) Para todo $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k)$ converge puntualmente a una función continua.
- (3) Para toda $f \in V$,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \psi(x - k),$$

donde la convergencia es en $L^2(\mathbb{R})$ y uniforme en \mathbb{R} .

Estos espacios son el modelo adecuado para numerosas aplicaciones en procesamiento de señales e imágenes. Un problema importante es poder determinar qué funciones pertenecen a un espacio de muestreo en términos del generador. En este trabajo se estudió este problema y se dan condiciones necesarias y suficientes para que una función pertenezca a un espacio de muestreo.

Título: Caracterización de Mejores Aproximantes Monótonos en Varias Variables

Autores: Fernando Mazzone

Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto

Sea Ω el n -cubo abierto $(-1, 1)^n$ y $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ una función continua, convexa y par en la segunda variable, con $\varphi(x, a) = 0$ si, y sólo si, $a = 0$, con la derivada $D_2\varphi$ continua en $\Omega \times \mathbb{R}$ y $D_2\varphi(\cdot, a) \in L_\infty(\Omega)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. El objetivo de este trabajo es caracterizar mejores φ -aproximantes crecientes, es decir para $f \in C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ caracterizar la o las funciones crecientes sobre Ω , g tales que

$$\int_{\Omega} \varphi(x, f(x) - g(x)) dx \leq \int_{\Omega} \varphi(x, f(x) - h(x)) dx,$$

para toda h creciente sobre Ω .

Entre otros resultados obtenemos que un mejor φ -aproximante creciente a f sobre Ω , es un mejor φ -aproximante creciente sobre la frontera relativa a Ω de cada conjunto $\{g > a\}$, $a \in \mathbb{R}$, respecto a una medida de la forma $w(x)\mathcal{H}^{n-1}$, donde \mathcal{H}^{n-1} es la medida de Hausdorff $n - 1$ dimensional y $n^{-1} \leq w(x) \leq 1$ en \mathcal{H}^{n-1} -casi todo punto de la frontera. De resultados de este tipo derivamos que $\partial_{\Omega}\{g > a\} \cap \partial_{\Omega}\{g > b\} = \emptyset$ cuando $a \neq b$ lo que implica la continuidad del mejor aproximante creciente.

REFERENCIAS

- [1] F. Mazzone and H. Cuenya, *A characterization of best φ -approximants with applications a multidimensional isotonic approximation*, Constructive Approximation, Por aparecer.
- [2] ———, *Isotonic Approximation in L_1* , Journal of Approximation Theory **117** (2002), 279–300.

Título: Derivada de Gateaux en Espacios de Lorentz-Orlicz.

Caracterización de Mejores Aproximantes

Autores: F.E.Levis, H.H.Cuenya

Lugar: Dto. de Matemática. FCEFQyN. Universidad Nacional de Río Cuarto

Sea $\Omega = [0, \alpha]$ con $0 < \alpha \leq \infty$ y μ la medida de Lebesgue. Sea $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(\Omega, \mu)$ la clase de funciones reales μ -medibles sobre Ω que son finitas μ -a.e. Como es usual, para $f \in \mathcal{M}_0$ denotamos por μ_f su función distribución y por f^* su reordenamiento decreciente.

Sea $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, una función diferenciable, convexa tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(t) > 0$ para todo $t > 0$. Nosotros denotamos por $w : (0, \alpha) \rightarrow (0, \infty)$ una función peso decreciente y localmente integrable con $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ si $\alpha = \infty$. Para $f \in \mathcal{M}_0$, sea

$$\Psi_{w,\phi}(f) := \int_0^\alpha \phi(f^*(t))w(t)d\mu(t).$$

En el espacio de Lorentz-Orlicz $\Lambda_{w,\phi}$, generado por el funcional $\Psi_{w,\phi}$, consideramos la norma de Luxemburg, $\|f\|_{w,\phi}$.

En [1], Carothers, Haydon y Lin, muestran que si $\alpha = \infty$, $\phi(t) = t^p$ con $1 < p < \infty$ y w es estrictamente decreciente, $\gamma_{\Psi_{w,\phi}}^+(f, h) = p \int_0^\infty w(\tau_{f,h})|f|^p sg(f)h d\mu$, donde $\tau_{f,h}$ es una cierta transformación que preserva medidas.

Nosotros generalizamos este resultado considerando $0 < \alpha \leq \infty$, w decreciente y ϕ una función convexa. Además, calculamos la derivada lateral según Gateaux para el funcional $\Psi_{w,\phi}$ y para la norma de Luxemburg $\|\cdot\|_{w,\phi}$.

Como una aplicación de lo anterior, estudiamos un problema de mejor aproximación. Para un subconjunto convexo K de $\Lambda_{w,\phi}$ y $f \in \Lambda_{w,\phi}$, diremos que $g \in K$ es un mejor Ψ -aproximante a f si $\Psi_{w,\phi}(f - g) \leq \Psi_{w,\phi}(f - h)$ para todo $h \in K$ y $g \in K$ es un mejor aproximante a f si $\|f - g\|_{w,\phi} \leq \|f - h\|_{w,\phi}$ para todo $h \in K$. Nosotros caracterizamos el conjunto de mejores Ψ -aproximantes sobre convexos y comparamos el conjunto de mejores aproximantes con el conjunto de mejores Ψ -aproximantes.

REFERENCIA

1. N.L. CAROTHERS, R. HAYDON, P.K. LIN, *On the Isometries of the Lorentz function spaces*, Israel Journal of Mathematics **84** (1993), 265-287.

Título: Desarrollos en series de potencias de tipo
asintóticos que son periódicos

Autores: José. L. Aguado-Emilio Aguirre

Lugar: Unicen-Tandil

Cuando se utiliza un software matemático para desarrollar en serie funciones racionales, los coeficientes de la serie pueden ser cero sin que dicho software los muestre como tal dependiendo de su arquitectura de aproximación. Aquí mostramos que dada una función racional irreducible $\frac{P(x)}{Q(x)}$, su desarrollo en $x = \infty$ es periódico si y sólo si las raíces de $Q(x)$ son todas raíces de la unidad con multiplicidad 1 y además el período de la serie es el mínimo común múltiplo de los grados de los polinomios ciclotómicos que satisfacen las raíces de $Q(x)$.

Título: Mejor Aproximación Monótona en la Métrica Uniforme

Autores: Fernando Mazzone y Erica Schwindt

Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto

Vamos a considerar el problema de mejor aproximación

$$\text{mín} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|w(x) \right\},$$

donde Ω denota el n -cubo $[-1, 1]^n$ de \mathbb{R}^n , $f \in C(\Omega)$, $0 < \lambda < w(x) < \Lambda$ y el mínimo se toma sobre el conjunto de funciones g monótonas crecientes sobre Ω .

Se consigue generalizar varios de los resultados para $n = 1$ obtenidos en [2].

REFERENCIAS

- [1] F. Mazzone and H. Cuenya, *A characterization of best φ -approximants with applications a multidimensional isotonic approximation*, Constructive Approximation, Por aparecer.
- [2] V. Ubhaya, *Isotone Optimization, I*, Journal of Approximation Theory **12** (1974), 146- 159.