

ISSN 1514-9560

# **NOTICIERO**

## **DE LA UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA**

# **COMUNICACIONES UMA – REM 2010**



**TANDIL**

MAYO 2011

Santa Fe

VOLUMEN 48



**NOTICIERO**  
de la  
**UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA**

Editores

**Dr. Fernando Gaspoz, Dra. Ivana Gómez**

Colaboradores

**Dra. Marilina Carena, Dra. Silvia Hartzstein**

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, CONICET - UNL  
Güemes 3450, S3000GLN Santa Fe

E-mail: [noticiero.uma@gmail.com](mailto:noticiero.uma@gmail.com)

URL: <http://www.notiuma.santafe-conicet.gov.ar>

Comité Editor

**Dr. Hugo Aimar**

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, CONICET - UNL

**Dr. Hernán Cendra**

Universidad Nacional del Sur

**Dra. Eleonor Harboure**

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, CONICET - UNL

**Dr. Roberto Macías**

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, CONICET - UNL

**Mg. Beatriz Marrón**

Universidad Nacional del Sur

---

<sup>1</sup> ISSN 1514-9560

Permitida la reproducción parcial o total del contenido de esta Revista, con fines educativos o científicos, siempre que se mencione la fuente.

## Contenidos

■ <b>A nuestros lectores</b> . . . . .	v
■ <b>Reunión UMA 2010 - Tandil</b> . . . . .	1
■ <b>Comunicaciones REM 2010</b> . . . . .	3
■ <b>Comunicaciones Científicas UMA 2010</b> . . . . .	43
● <b>Álgebra y Teoría de Números</b> . . . . .	45
● <b>Análisis Funcional y Complejo</b> . . . . .	75
● <b>Análisis Numérico</b> . . . . .	89
● <b>Análisis Real y Armónico y Teoría de la Aproximación</b> . . . . .	99
● <b>Aplicaciones de la Matemática</b> . . . . .	121
● <b>Ecuaciones Diferenciales</b> . . . . .	149
● <b>Estadística</b> . . . . .	163
● <b>Física Matemática</b> . . . . .	171
● <b>Geometría</b> . . . . .	183
● <b>Lógica y Computabilidad</b> . . . . .	200
● <b>Matemática Discreta, Combinatoria y Optimización</b> . . . . .	222
● <b>Teoría de Lie</b> . . . . .	240
● <b>Teoría de Probabilidad</b> . . . . .	254
■ <b>Adelantos UMA 2011 - Tucumán</b> . . . . .	267
■ <b>Unión Matemática Argentina: Información general</b> . . . . .	267



## A los lectores

*En este volumen el Noticiero publica las comunicaciones científicas y las comunicaciones en educación matemática aceptadas para la Reunión Anual de la UMA en la ciudad de Tandil que se realizó en el 2010, y una reseña de las actividades principales realizadas en esa oportunidad.*

*Las últimas páginas contienen información sobre la próxima reunión que tendrá lugar en la ciudad de Tucumán.*

*Los editores*

Colaboró en este número: Walter Reartes (UNS).



## Reunión UMA 2010

- LX Reunión de Comunicaciones Científicas
- XXXIII Reunión de Educación Matemática (REM)
- XXII Encuentro de Estudiantes de Matemática
- II Festival de Matemática

Del 27 de septiembre al 2 de octubre de 2010 se realizó la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina en Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires en la ciudad de Tandil, organizada por la Unión Matemática Argentina y el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.

Las conferencias de educación tuvieron lugar el lunes y martes respectivamente, *La Enseñanza de la Matemática desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, por María Rita Otero (Universidad Nacional del Centro, Tandil), y *¿Y esto... para qué me sirve?: algunas reflexiones para enfrentar esta pregunta y no morir en el intento*, por Gabriel Soto (Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Don Bosco, Comodoro Rivadavia).

La conferencia apertura "Rey Pastor" estuvo a cargo de Manuel de León (Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid) con *Una introducción histórica a la mecánica noholónoma*. El jueves en la "Conferencia Santaló" *Restricción de Representaciones*, por Jorge Vargas (FAMAF), y por la tarde, *Regularidad geométrica y homología*, por Andrea Solotar (UBA). En las conferencias del viernes, *Una aproximación a la inferencia causal* por Andrea Rotnitzky (Universidad de Harvard, Universidad Torcuato Di Tella), y *La Conjetura de Hodge* por Javier Fernández (Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche). Cerrando el congreso la conferencia "González Domínguez" con *La lógica trivalente de los espectros reales abstractos*, por Alejandro Petrovich (UBA).

Se dictaron seis cursos para profesores y nueve cursos para estudiantes, que a continuación detallamos. *Uso de una planilla de cálculo en la enseñanza*, por Edgardo Güichal; *La geometría de las operaciones*, por José Araujo; *Un estudio de clases de matemática en primer año del nivel secundario*, por Dilma Fregona; *Los modelos dentro de la educación matemática realista*, por Adriana Rabino, Patricia Cuello y Flavia Santamaría; *La enseñanza de la geometría a partir del juego*, por Nilda Graciela Mendez; *Curso-taller de matemática para la construcción colaborativa del conocimiento usando NTics*, por Yolanda Gil, Claudia de los Ríos, Lucía Gil y Patricia Cuadros; *Estructuras geométricas para las variedades diferenciales*, por Gabriel Larrotonda; *Información y azar*, por Verónica Becher; *Álgebra lineal en dimensión infinita*, por Guillermo Cortiñas; *Métodos matemáticos en economía*, por Fernando Tohmé; *Optimización abstracta: una introducción a la optimización en espacios de funciones*, por Pablo Lotito; *Estructuras combinatorias y funciones generatrices*, por Rodrigo Iglesias; *Sistemas hamiltonianos e integrabilidad*, por Hugo Montani; *Superficies mínimas*, por Laura Barberis; *Inecuaciones variacionales, optimización y control óptimo*, por Domingo Tarzia.

El Festival de Matemática contó con una muestra permanente de juegos, murales e imágenes. Este evento intenta propiciar una manera creativa y diferente de relacionar distintos conocimientos matemáticos. Se dictaron dos conferencias: *El Teorema de Gödel* por Gustavo Piñeiro (IES N° 2 “Mariano Acosta”, INSPT (UTN), UBA), y *La importancia de Rey Pastor en la matemática Argentina*, por Eduardo Ortiz (Imperial College, Londres).

En el concurso de monografías para estudiantes, en homenaje al Dr. Eduardo Zarantonello, con el tema *Teorema de Krein-Milman*, resultó ganador Joaquín Rodrigues Jacinto de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata. El jurado estuvo integrado por Sheldy Ombrosi, Alejandra Maestripieri y Esteban Andruchow.

Sitio web: <http://www.exa.unicen.edu.ar/uma2010>

## Comunicaciones REM 2010

Universidad Nacional del Centro  
de la Provincia de Buenos Aires

Tandil



**Autores:** Sandra Liliana Ponce

**Lugar:** Universidad Autónoma de Entre Ríos - Universidad Nacional de Entre Ríos

**Categoría:** Relato de Experiencias

**Nivel:** Formación inicial de profesores

---

El problema de la ruta más corta: una experiencia de aprendizaje por proyectos

Son numerosas las investigaciones (Joan Ferrés, 2000; Aguaded y Contín, 2002; Fainholc, 2004; Downes, 2005; Cabero, 2007; entre otros) que reportan por qué las nuevas generaciones, nacidas en un mundo caracterizado por la incertidumbre, la relatividad y la complejidad, necesitan imperiosamente desarrollar habilidades para saber decir, mostrar, reportar, tomar decisiones y prever.

Recientemente, una de las tantas orientaciones educativas que pretende dar respuesta a las exigencias de esta sociedad, es la denominada educación basada en competencias. Esta visión implica elegir estrategias didácticas que acerquen el objeto de estudio a la cotidianeidad del contexto en el que podría aplicarse, invitando al alumno a investigar, a formular hipótesis, a producir ideas reconstruyendo la información, para darle sentido y tornarla relevante. Más aún, fomenta competencias transversales con el fin de lograr niveles progresivos de implicación social y de formación personal.

En matemática, las metodologías activas de tipo aprendizaje por proyectos podrían servir como alternativa a la hora de privilegiar la educación por competencias.

En este trabajo, se relata una experiencia llevada a cabo en la asignatura Álgebra III del segundo año de la carrera Profesorado de Matemática de la Universidad Autónoma de Entre Ríos. Durante la misma se eligió la metodología de aprendizaje basado en proyectos para abordar un problema concreto, con el sustento de la Teoría de Grafos.

**Autores:** Beatriz Emilce Copa  
**Lugar:** Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Salta  
**Categoría:** Relato de Experiencias  
**Nivel:** Universitario

---

Resultados y propuesta para la mejora de la implementación del curso de apoyo y nivelación en el área matemática

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta el régimen de aprobación que adoptan las materias es el régimen promocional, por lo cual es necesario que los ingresantes se internalicen con dicho régimen y con el tipo de evaluación continua, es por ello que se efectúa el Curso de Apoyo y Nivelación en el marco del CILEU (Ciclo de Introducción a los estudios universitarios).

Este Curso consta de dos áreas: Matemática y Estrategias del Aprendizaje, este trabajo tendrá su foco específicamente en los contenidos y la implementación en el Área Matemática. En el presente trabajo se realiza un análisis de los resultados obtenidos en la implementación del Curso de Apoyo y Nivelación en el área Matemática de los años 2009 y 2010. Se analizará tanto la metodología utilizada y los resultados obtenidos a través de evaluaciones, lo cual llevará a elaborar propuestas de mejoras para el Curso en dicha área.

---

**Autores:** Yolanda Gil, Claudia de los Ríos  
**Lugar:** Departamento Geofísica y Astronomía - Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales- Universidad Nacional de San Juan  
**Categoría:** Relato de Experiencias  
**Nivel:** Universitario

---

Diseños de nuevos entornos de aprendizajes basados en las nuevas tecnologías

En los últimos años hemos percibido que para adaptarse a las necesidades de la sociedad actual, los docentes de instituciones de educación superior debemos flexibilizarnos y desarrollar modos de integración de las tecnologías en los procesos de enseñanza. Así como cualquier institución interesada en la calidad de sus actividades, la Universidad debe propiciar cambios para la obtención de dichos propósitos. Por lo que es necesario considerar una nueva concepción de los alumnos, así como cambios de rol en los profesores. Todo esto implica, a su vez, cambios en las metodologías de enseñanza-aprendizaje

hacia un modelo más flexible. Por lo tanto si queremos comprender estos procesos de cambio y los efectos que ellos producen, debemos ubicarnos en el marco de los procesos de innovación.

Es bien conocido que la tecnología ha adquirido una gran notoriedad y es constantemente observada por toda la sociedad, pero hay otros valores, además de los propios de cada disciplina, que deben estar presentes en la educación de nuestros futuros profesionales, de forma tal que estén capacitados y adaptados a su tiempo. Estamos en un todo de acuerdo con Barro, Senen (2002) que opina que “En el ámbito docente las TIC deben estar al servicio de una formación de calidad que otorgue un mayor protagonismo al alumno en el proceso de aprendizaje. Este *modus operandi* mejorará sus competencias en el uso de las nuevas tecnologías, al formar parte activa de su vida estudiantil. Las habilidades adquiridas tendrán su reflejo en el desempeño de su futura actividad profesional, permitiéndole desenvolverse con soltura en la sociedad de la información y las comunicaciones en la que ya vivimos.”

Esta fue una de nuestras premisas al incorporar en forma paulatina y sistemáticamente software científico en las clases de matemática.

A partir de cuestiones tales como: ¿Cuál es la herramienta más útil para el desarrollo de las actividades docentes? y ¿cuántas puedo usar?, es que trabajamos con un foro que nos sirve como nexo para orientar a los alumnos en las actividades que deben desarrollar usando un software matemático. Es nuestra intención mostrar el modo de trabajar en un primer año de las carreras de Licenciatura en Geofísica y Licenciatura en Astronomía en la cátedra Análisis Matemático I. Se enmarca en un proyecto de investigación educativa cuyo objetivo principal es elaborar, analizar e interpretar propuestas pedagógicas alternativas que permitan orientar las decisiones de los docentes en torno a la utilización de tecnología educativa en la enseñanza de la Matemática.

Al finalizar las actividades se realizan puestas comunes para despejar dudas y mostrar los desarrollos de los ejercicios propuestos.

Nuestra experiencia de más de diez años nos permite aseverar que las universidades deben preparar a ciudadanos para desempeñarse en un medio profesional propio de la sociedad en la cual ha de actuar. En dicho ámbito es primordial la aplicación de las nuevas tecnologías, sin descuidar el desarrollo de criterios para selección y tratamiento de la información.

**Autores:** Lucía Gil, Inés Calvo

**Lugar:** Departamento de Informática - Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de San Juan

**Categoría:** Relato de Experiencias

**Nivel:** Universitario

---

#### Experiencia innovadora de utilización de las TICS en la formación de docentes

En este trabajo se presenta la implementación de un curso semi-presencial de la incorporación de las nuevas Tecnologías en enseñanza de la Matemática, impartido por docentes integrantes de un proyecto de Investigación Educativa de la Facultad de Ciencias Exactas, Física y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan, a docentes del nivel secundario.

La experiencia comienza mediante una sección inicial presencial, un periodo de dos semanas de enseñanza virtual, otro encuentro presencial y nuevamente dos semanas de enseñanza virtual. Al finalizar el curso una sesión de ajuste y evaluación denominada puesta en común con el fin de analizar y discutir la metodología y resultados de las actividades propuestas.

Respondiendo a los objetivos, las nuevas tecnologías utilizadas para la implementación del curso son aquellas que a su vez, los docentes deben poner en práctica en el proceso de enseñanza- aprendizaje, dando de esta manera importancia al efecto multiplicativo de la experiencia, tendiendo a acortar la brecha existente entre el alumno y el docente.

---

**Autor:** Alicia Isabel Ledesma

**Lugar:** Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias Económicas-UNLP

**Categoría:** Relato de Experiencias

**Nivel:** Universitario

---

#### Estimación en un modelo estocástico de pesquería

Los cambios producidos por la revolución electrónica, la generalización de la informática y la valoración ambiental indican la necesidad de introducir modificaciones de fondo en la formación de los ingenieros del siglo XXI. Se propone en este trabajo un modelo de aprendizaje sostenible, asociado fundamentalmente a la enseñanza de contenidos motivantes para el alumno. El debate sobre el estado de los stocks pesqueros y la eficacia de su gestión se ha incorporado como un elemento más a la creciente crisis global sobre la

---

situación ambiental del planeta. Teniendo en cuenta lo expresado, el objetivo del trabajo es que el alumno adquiera la capacidad de hacer estimaciones simultáneas de estados y parámetros en un sistema dinámico en tiempo discreto, a través de problemas, aquí se describe en particular un modelo estocástico de pesquería. Se estimarán los estados y parámetros desconocidos por el método de Maxima Verosimilitud. El sistema considerado es separado en dos sistemas lineales interconectados: uno para los estados y otro para los parámetros. La solución es obtenida por iteración entre dos sistemas lineales. Se realizan las simulaciones correspondientes.

---

**Autores:** María Inés Cavallaro, Marta Anaya, Elsa García Argiz, Patricia Aurucis

**Lugar:** UTN, Facultad Regional Buenos Aires - UBA, Facultad de Ingeniería

**Categoría:** Relato de Experiencias

**Nivel:** Universitario

---

Preconceptos y sesgos del pensamiento en Matemática. Análisis de propuestas remediales.

Muchas de las dificultades que el alumnado presenta en el trabajo sobre ciertos conceptos matemáticos, están vinculadas con preconceptos, modelos intuitivos y heurísticas del pensamiento que son persistentes y resistentes al cambio. El proceso de aprendizaje requiere entonces, no sólo el trabajo metacognitivo de la concientización de las propias tendencias y sesgos del pensamiento, sino de una integración de la nueva información y la reorganización del conocimiento existente, que es lo que se ha denominado "cambio conceptual".

En este trabajo, presentaremos estudios con alumnos de ingeniería cursando el segundo y tercer año de la carrera. Las experiencias que analizaremos bajo la perspectiva señalada, se han llevado a cabo en dos áreas: I) el área del conocimiento probabilístico en el caso de la probabilidad condicional y II) el área del análisis funcional, tratando específicamente el concepto de la funcional Delta de Dirac.

En ambos casos se presentará el problema, la dificultad, sus posibles causas y la experiencia instruccional asociada en el marco de la Teoría del Cambio Conceptual.

**Autores:** Elisa Petrone, Natalia Sgreccia, Natalia Contreras, Patricia Mascó, Natalia Crevacuore, Natalia Ferrari, Elisabet Reynoso

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

**Categoría:** Propuesta de Enseñanza

**Nivel:** Secundario

---

Presentación del concepto de grafo mediante problemas en la escuela secundaria. Su potencia modelizadora.

En esta comunicación planteamos una propuesta didáctica que emplea la resolución de problemas (RP) como recurso de enseñanza y de aprendizaje que interviene desde el comienzo del proceso de generación de un concepto matemático. En dicho proceso mostramos también cómo situaciones de la realidad han ido dando origen a ramas de la Matemática.

Creemos que mediante la implementación de propuestas de este tipo se involucran en el aprendizaje aspectos en los cuales se basa la propia actividad matemática para su desarrollo, crecimiento y formalización. Se promueve así una mejor comprensión de su esencia, a la vez que se atiende a una importante variable didáctica: la motivación.

Consideramos que esta forma de trabajo en el aula requiere de una constante intervención docente, la que está dada por el diseño y la guía de toda la actividad, comenzando con la selección adecuada de los problemas, pasando por la elaboración y puesta en acción de preguntas que avancen hacia la formalización de conceptos, apelando siempre a la intuición y reflexión de los alumnos.

Proponemos una manera en que podría emplearse la modalidad de RP para presentar, en los primeros años de la escuela secundaria, el concepto de grafo. Si bien el mismo no figura explícitamente entre los contenidos prescriptos en los diseños curriculares oficiales, forma una parte importante del área Matemática Discreta que sí es destacada en ellos por su creciente cantidad y diversificación de actuales campos de aplicación. Además las situaciones presentadas en esta propuesta corresponden a problemas combinatorios elementales, que caben ser inscriptos en el Eje Estadística y Probabilidades, y están integradas con conocimientos de Geografía. También pueden emplearse en entrenamiento para Olimpíadas Matemáticas, en las que aparecen frecuentemente problemas de naturaleza combinatoria, algunos de los cuales pueden resolverse más fácilmente mediante una modelización con grafos.

**Autores:** María Rosa Rodríguez y Jesús Alberto Zeballos  
**Lugar:** Universidad Nacional de Tucumán  
**Categoría:** Propuesta de Enseñanza  
**Nivel:** Universitario

---

El universo del discurso: comprensión y existencia en matemática

En este trabajo se discurre acerca de la comprensión y la existencia de los entes matemáticos. ¿Cómo conciben los estudiantes la existencia de los objetos lógico-matemáticos? ¿Son reales, productos de la experiencia, o ideales, productos de la razón? ¿Que sean objetos ideales significa que son meramente conceptos originados en la mente? Pensamos que éste es un problema que excede los límites lógico-matemáticos para introducirse en el ámbito de la Metamatemática o, para ser más precisos, en la Ontología matemática. Las consideraciones acerca del contenido existencial u ontológico de las proposiciones lógico-matemáticas, tienen como consecuencia invalidar las inferencias de *contrariedad*, *subcontrariedad* y *subalternación* del cuadro tradicional de oposición y de los modos silogísticos, Bamalip, Darapti, Felapton y Fesapo. Después de algunas consideraciones acerca de los diversos estratos de la *existencia real*, se advierte que este problema se resuelve considerando la naturaleza de las proposiciones (condicional en las universales, categórica en las particulares), el universo del discurso (con miembros o vacío) y del contenido existencial de los enunciados.

---

**Autores:** Graciela I. Fernández y Liliana M. Gysin  
**Lugar:** Departamento de Matemática - FCEN - UBA  
**Categoría:** Propuesta de Enseñanza  
**Nivel:** Universitario

---

Una propuesta para enseñar geometría proyectiva en la formación de profesores de matemática

En esta propuesta presentamos algunos resultados de Geometría Proyectiva que consideramos podrían formar parte de la formación de profesores de matemática. La geometría proyectiva resulta una teoría no elemental - como podría serlo la geometría sintética - que, además del valor intrínseco que posee por su desarrollo histórico y la importancia que en ella tienen las demostraciones fuertemente apoyadas en los esquemas, aporta una mirada

particular sobre las diferentes geometrías junto con modelos que permiten avanzar, por ejemplo, sobre las geometrías no euclidianas.

Elegimos presentar aquí un recorte de la Geometría Proyectiva en el plano sobre los números reales, sin usar coordenadas, que avanza hasta la obtención de los movimientos rígidos y las homotecias como casos particulares de las colineaciones. Esta propuesta puede incluirse en un curso avanzado de geometría para la formación de profesores de matemática. Fue armada para ser trabajada en grupos de 4 ó 5 alumnos, pero consideramos que lo diferente y novedoso del tema, en cuanto a la forma de trabajo y al objeto de estudio en sí, hace necesario un fuerte apoyo de los docentes a lo largo de la resolución de los problemas planteados. La forma de trabajo grupal generará las posibilidades de discusión y re-descubrimiento de las distintas propiedades y aplicaciones que se presentan a lo largo de la propuesta.

Incluimos una breve referencia histórica, porque consideramos que la misma es parte de la formación y además ayuda a los alumnos a ubicarse en el contexto, como se desprende de algunos de los comentarios de los alumnos incluidos en el análisis. El enfoque es geométrico (y no algebraico) ya que se trata de que los alumnos adquieran este tipo de pensamiento como una herramienta para su propio desarrollo.

---

**Autores: Ana Emilia Ferrazzi de Bressan y Juan Carlos Bressan**

**Lugar: ESEADE, Universidad de Buenos Aires**

**Categoría: Propuesta de Enseñanza**

**Nivel: Universitario**

---

Sistemas lineales planos de ecuaciones diferenciales y en diferencias: Un estudio comparativo

Este trabajo tiene como propuesta de enseñanza relacionar dos temas que habitualmente se tratan por separado. Nos estamos refiriendo a los sistemas lineales autónomos de primer orden planos de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias finitas. Ambos sistemas admiten un desarrollo en paralelo en donde pueden destacarse las similitudes y las diferencias. En tal sentido el estudio se centrará a partir de la matriz inversible  $A$  que define el sistema, considerando únicamente el caso en que sus autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sean reales distintos y no nulos. Los autovalores y autovectores de esa transformación lineal serán el nodo cognitivo a partir del cual desarrollaremos el estudio cuantitativo y cualitativo de las soluciones de dichos sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencias.

Las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales estarán dadas por funciones de los números reales a valores vectoriales mientras que las de ecuaciones en diferencias por funciones de los números enteros no negativos a valores vectoriales. De allí que mientras la representación gráfica de la trayectoria de cada solución en el plano, en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales será una curva, en cambio en el de los sistemas de ecuaciones en diferencias estará dada por una sucesión de puntos del plano. Los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias con los que trabajaremos serán respectivamente de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \quad (I)$$

En cada caso se llevará el sistema a su forma canónica, las que son respectivamente:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (2) \qquad \begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} \quad (II)$$

Estos sistemas se resuelven fácilmente siendo sus soluciones respectivamente:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (3) \qquad Y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \end{pmatrix} \quad (III)$$

La matriz de paso  $P$  cuyos vectores columna son respectivamente auto-vectores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , permitirá obtener la solución general de cada uno de los sistemas (1) y (I) las cuales estarán dadas respectivamente por:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (4) \qquad \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \end{pmatrix} \quad (IV)$$

Hasta aquí el desarrollo de la resolución analítica de ambos sistemas sigue procedimientos análogos. Sin embargo, la diferencia se presentará en el tipo de punto de equilibrio en los sistemas (1) y (I). El estudio de las soluciones de línea recta de los sistemas (2) y (II) permitirá determinar en cada uno de estos sistemas si el punto de equilibrio  $\vec{0} = (0; 0)$  es una fuente (nodo inestable), un sumidero (nodo estable) o un punto de silla. Evidentemente el tipo de punto de equilibrio de los sistemas (1) y (I) será el mismo que el de los respectivos sistemas canónicos (2) y (II). La relación existente entre los autovalores de los sistemas y el tipo de punto de equilibrio es la siguiente.

**Sistemas de ecuaciones diferenciales:**

(1)  $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow (0; 0)$  sumidero.

- (2)  $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow (0; 0)$  fuente.  
(3)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  ó  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \Rightarrow (0; 0)$  punto de silla.

**Sistemas de ecuaciones en diferencias:**

- (I)  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \Rightarrow (0; 0)$  sumidero.  
(II)  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1 \Rightarrow (0; 0)$  fuente.  
(III)  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$  ó  $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1| \Rightarrow (0; 0)$  punto de silla.

En los demás casos el tipo de punto de equilibrio correspondiente a los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias no coincide. Mediante ejemplos se analizan las diversas situaciones que pueden presentarse y se destaca las diferencias entre las soluciones de línea recta de autovalores negativos para los sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas.

---

**Autores:** Juliana González, Perla Medina, Silvia Vilanova, Mercedes Astiz

**Lugar:** Universidad Nacional de Mar del Plata

**Categoría:** Propuesta de Enseñanza

**Nivel:** Universitario

---

Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra

Son muchos los temas de matemática que presentan inconvenientes para los estudiantes del primer año de las carreras universitarias. El análisis de estos inconvenientes debe impulsar a los docentes a generar diferentes modalidades de enseñanza de los mismos.

De acuerdo con lo que plantea Duval (1998), en referencia a la construcción de los conceptos matemáticos, es importante destacar que cada representación que de ellos se haga es parcial respecto al concepto que representa y por ende se debe considerar como absolutamente necesaria la interacción de diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto. También Laborde (1999) afirma: “una parte de la esencia de las matemáticas es la actividad de resolución de problemas, y esta actividad está basada en una interacción entre varios registros y tratamientos en cada registro”.

En este contexto, y con el objetivo de colaborar con la enseñanza de conceptos relacionados con sucesiones numéricas, este trabajo presenta una propuesta que consiste en una serie de actividades con soporte informático.

En general, los recursos, tanto manipulativos como virtuales, son inertes en sí mismos. Para que desempeñen un papel en el aprendizaje es necesario formular tareas que inciten la actividad y reflexión matemática . . . El recurso

puede ayudar a crear un contexto rico para apoyar el diálogo del profesor con los alumnos a propósito de unas tareas que son específicas, y que ponen en juego los conocimientos matemáticos pretendidos (Godino y otros, 2005).

Por lo expuesto, la propuesta que se presenta consta de actividades interactivas con soporte informático Geogebra y actividades para desarrollar en papel, siempre con el acompañamiento del docente en su rol de observador y consultor.

---

**Autores:** Nydia Dal Bianco, Silvia Martínez, Andrea Pía Salvadori

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad Nacional de La Pampa - Santa Rosa

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Primario

---

#### Ingeniería didáctica en la resolución de problemas utilizando nuevas tecnologías

A partir de investigaciones realizadas en distintos ámbitos, especialmente en la Didáctica de la Matemática, existe consenso en que en la enseñanza de esta disciplina se deben equilibrar sus aspectos formativos e informativos, buscando un aprendizaje activo y seleccionando estrategias para estimular actitudes positivas de los alumnos hacia la misma.

En este trabajo describimos algunas de las experiencias realizadas con alumnos de los primeros años de las carreras de Ciencias Naturales, Química e Ingeniería Agronómica, utilizando la metodología de la Ingeniería didáctica y como parte de las actividades programadas en el proyecto "Diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de la Matemática en carreras técnicas" que integramos como docentes en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.

Aplicando las técnicas de la resolución de problemas y con determinados recursos informáticos, se han logrado modificar estructuras y generar cambios en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Las actividades diseñadas y desarrolladas en clases con los estudiantes en forma presencial y/o virtual, fueron procesadas y presentadas en Congresos y Reuniones de Educación Matemática, con el objeto de compartir con docentes e investigadores, situaciones y problemáticas afines a esta disciplina.

**Autores:** Gabriel Ignacio Avellaneda, Lorena Inés Pastrana, Ana María Aramayo

**Lugar:** Universidad Nacional de Salta - Facultad de Ciencias Exactas

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Secundario

---

#### Resolución de problemas con valores de contorno y con valores iniciales utilizando SCILAB

El uso de SCILAB para la integración numérica de ecuaciones diferenciales es provechoso, por un lado por la compatibilidad con los sistemas operativos de Windows y Linux y por otro lado, contiene paquetes y librerías que resuelven numéricamente tanto ecuaciones como sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Con los resultados numéricos obtenidos, usando el mismo programa, se puede realizar gráficas a fin de interpretar los mismos.

En este trabajo se relata la experiencia del uso de SCILAB en un laboratorio no obligatorio para alumnos de Matemática 3 (Licenciatura en Química) en el mes de agosto de 2009, se extendió con más sustento teórico en una asignatura optativa de la Licenciatura y Profesorado en Matemática, en la cual se programó distintos métodos de resolución para su comparación y se utilizó los paquetes incluidos en el programa. Por último, para que alumnos y docentes de distintas áreas pudieran aprender el uso de este software se dictó un curso de extensión a principios del 2010.

La experiencia demuestra que el uso de SCILAB 5.1 - 5.2, es ameno en cuanto a su sintaxis y tiene una buena aceptación por parte de los nuevos usuarios.

Los alumnos, tanto de las materias de grado como del curso de extensión, no solo resolvieron los problemas propuestos por los docentes, sino que también sugirieron otras aplicaciones utilizando modelos alternativos a los propuestos.

**Autores:** María Cristina Rocerau, Silvia Vilanova, Guillermo Valdez, María Isabel Oliver, María Susana Vecino, Carolina Vivera

**Lugar:** Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Preuniversitario

---

La fracción como operador. Un complejo concepto elemental

El presente trabajo, consiste en explorar de qué manera, individuos con diferentes características en cuanto a su edad, nivel de formación y experiencia, resuelven un problema cuya solución puede obtenerse mediante el uso de conceptos matemáticos elementales.

Se analizan los recursos utilizados por los diferentes grupos y se plantean algunos interrogantes que a nuestro entender merecen atención.

---

**Autores:** D. Emmanuele, M. I. González, B. Introcaso, D. Braccialarghe

**Lugar:** Universidad Nacional de Rosario

**Categoría:** Trabajo de investigación

**Nivel:** Universitario

---

Sobre la forma de presentación de los problemas en las clases de matemática

En otras producciones de nuestro equipo de investigación, ya hemos planteado la naturaleza profundamente social de la Matemática (Emmanuele, 2009) y cómo la postura asumida por el docente en el aula puede favorecer o entorpecer los procesos de aprendizaje y de construcción del conocimiento (González et al, 2009).

Recientemente, hemos atendido a los problemas que surgen en el aula ante la presentación de “situaciones no esperables” (Introcaso et al., 2010) y también a la dificultad que aparece para conceptualizar la estimación como una estrategia matemática de resolución de problemas cotidianos concretos (Braccialarghe et al, 2010). Siguiendo esta perspectiva, y a modo de articulación, en este trabajo - que se enmarca en el Proyecto ING 215, “La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura”, y es desarrollado

---

en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario - comunicamos los resultados obtenidos a partir de un mismo problema presentado de modos diferentes en dos cursos de alumnos universitarios de primer año. Intentamos analizar las consecuencias de dichas implementaciones de acuerdo a los procesos de subjetivación que favorecen, y a los efectos que el disciplinamiento provoca sobre la apropiación y uso de los saberes. Estas experiencias ponen de manifiesto, así, dos planos de análisis de las dificultades que la enseñanza del Cálculo presenta:

a) un plano de análisis general en relación a dos modalidades contrapuestas en cuanto a los lugares que asumen los docentes y los alumnos dentro del aula;

b) un plano de análisis particular en relación a la concepción de la Matemática como herramienta instrumental.

Según Edgar Morin (1999), quien plantea educar en la comprensión de las incertidumbres, la formación que hemos recibido quienes somos docentes es - históricamente - la de educar bajo el paradigma simplificador, donde no solamente hay que reducir lo múltiple a lo uno y borrar las diferencias, sino que además es preciso educar brindando conocimientos que tiendan a las certezas absolutas.

Si bien es claro que la problemática institucional condiciona y determina lo que ocurre en el aula, también es cierto que en una visión enmarcada en la didáctica fundamental es necesario que el contrato didáctico se cumpla; es decir que la relación sostenida por el docente y el alumno en el aula sea tal que el docente tenga la intención de que el alumno desarrolle las capacidades que le permitirán enfrentar problemas, y el alumno tenga deseos de enriquecer su capacidad de análisis de situaciones. Pensamos que enfrentarlos frecuentemente a problemas diferentes de los habituales, en los cuales la estrategia a utilizar para la resolución no necesariamente sea el tema recientemente tratado en clase, y que permitir que la complejidad ingrese al aula en la forma en que lo describimos, es una forma de iniciar el camino hacia el desarrollo del pensamiento crítico que tanto se menciona en los objetivos de la enseñanza.

**Autores:** Eudosia Natividad Díaz de Hibbard, Liliana Estela Valdez, Carlos Eugenio Puga, Estela Sonia Aliendro

**Lugar:** Universidad Nacional de Salta

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Secundario y preuniversitario

---

#### Las funciones en el mundo en que vivimos

Al momento de enseñar matemática, en el nivel secundario y aún en el primer año de la universidad, detectamos serias dificultades en el aprendizaje, por parte de nuestros estudiantes. Encontramos que las causas son muchas y complejas y dan lugar a una serie de interrogantes, no siempre factibles de responder. En la búsqueda de solución a esos planteamientos nos hemos convencido de que el modelo tradicional de enseñar matemática (presentación del tema, desarrollo y conclusión) debe ser reemplazado por el que usa la comunidad científica. Esto es: apropiación de un problema, búsqueda de soluciones parciales, conjeturación, validación o refutación hasta lograr la respuesta apropiada.

Para superar algunas de las dificultades estudiantiles de aprendizaje, proponemos plantear una enseñanza basada en la problematización de situaciones cotidianas, factibles de ser modelizadas por la matemática que nos interesa enseñar.

En el presente trabajo el tema elegido es el de funciones y varios de los problemas que incluimos versan sobre hechos cercanos a la realidad de nuestros estudiantes, algunos de los cuales enunciamos con información adicional, ilustrativa del tema que se trata, con el objetivo de que superen las dificultades que se originan en el serio déficit interpretativo que tienen nuestros estudiantes.

El interés que suscitan las situaciones problemáticas así planteadas, compensan con creces el tiempo extra que se necesita para diseñarlas.

**Autores:** María de las Mercedes Moya, Héctor Nicolás Funes, María Cristina Ahumada

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta - Facultad de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Salta

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Universitario

---

El juego de roles en un Foro Académico dentro de un curso de capacitación con las TIC a docentes de Matemática

El trabajo cuenta una experiencia realizada en un curso de Capacitación para docentes de Matemática del Nivel medio, en la ciudad de San Pedro de Jujuy. La capacitación cumple dos finalidades: el uso de las TIC y la enseñanza/aprendizaje de la matemática mediante estas nuevas tecnologías. El curso se desarrolló con la modalidad semipresencial, y una de las actividades desarrolladas es la que se presentará aquí. Dentro de los foros académicos que se han implementado, se realizó lo que llamamos "El juego de roles". Ha resultado una experiencia riquísima, en el sentido de participación, comunicación virtual, intercambio de conceptos matemáticos, históricos, al mismo tiempo que dejó a la luz las dificultades presentes en el manejo de las plataformas virtuales, en gran parte de los docentes.

La idea del juego es que los participantes interpreten en el foro el rol de un personaje importante, que se mueve en un cuadro de situación simulado. El cuadro se piensa en general, desde una perspectiva de aprendizaje de la matemática, del uso de tecnologías y con una transversalidad histórica que escapa los límites del tiempo y del espacio.

---

**Autores:** Ángela M. Maldonado, Viviana H. Giandini, Mirta N. Salerno

**Lugar:** Cátedra de Ingreso - Facultad de Ingeniería - UNLP

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Preuniversitario

---

Experiencia piloto del dictado descentralizado del Curso de Nivelación a distancia

La Cátedra de Ingreso de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata a través del Curso de Nivelación en Matemática, tiene como propósito fundamental acortar la distancia entre la Escuela Media y la Universidad. Los objetivos generales de la propuesta de ingreso son: nivelar

---

conocimientos básicos para equiparar las oportunidades educativas, colaborar con la adaptación del alumno a la vida universitaria, brindar las oportunidades que permitan la retención del alumno en la Facultad, evitando la deserción temprana y establecer vínculos con la Escuela Media. Los objetivos particulares de la cátedra y del curso de nivelación en Matemática son: acompañar a los alumnos para que estos adquieran hábitos de estudio, capacidad de análisis y que resignifiquen los conceptos básicos de matemática; lograr la participación activa de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, propiciando el trabajo grupal, con el objetivo de iniciarlos en el trabajo en equipos, desalentar el mecanicismo y alentar el espíritu crítico.

En la constante preocupación para lograr estos objetivos y en el convencimiento del rol que la Universidad debe desempeñar en esta articulación, se propone avanzar hacia la configuración de una propuesta integral en la cual docentes del nivel medio asuman parte de la responsabilidad del dictado del curso de nivelación a distancia.

En este contexto, desde la Cátedra de Ingreso de la Facultad de Ingeniería presentamos el subproyecto “Experiencia piloto de dictado *descentralizado* del curso de nivelación a distancia”, en el marco de la implementación de acciones complementarias a las Becas Bicentenario que fue aprobado y financiado por el Ministerio de Educación. La intención del mismo es incorporar a los docentes de la Escuela Media como participantes activos en el proceso de ingreso de los estudiantes a la Universidad, trabajar conjuntamente con ellos los contenidos del curso de nivelación en matemática, para que ellos difundan y repliquen en sus alumnos, no solo los contenidos, sino que extiendan a ellos la verdadera concepción del quehacer matemático.

En la primera etapa, que se está llevando a cabo durante el primer semestre de 2010, estamos trabajando con profesores de matemática de cuatro Escuelas Medias. Su objetivo es configurar un curso de nivelación que se ajuste a los objetivos de nuestra Facultad y que contemple las particularidades de cada Escuela integrante del proyecto.

La segunda etapa, prevista para segundo semestre, es la experiencia piloto, donde los docentes replicarán el curso a los alumnos interesados del último año.

En este artículo presentamos todas las acciones realizadas en la puesta en marcha de la primera etapa del proyecto, el diseño y organización del curso semipresencial para los docentes utilizando el Sistema Wac (Sistema Web de Apoyo para la Administración de Cátedras, desarrollado por la Facultad de Informática y la Dirección de Educación a Distancia, de la UNLP).

Por último, a modo de conclusión, debido a que la experiencia piloto aún no ha sido implementada, nos referiremos a los indicadores de avance y al impacto esperado con la implementación del presente proyecto.

---

**Autores:** Silvina Cafferata Ferri, Andrea Campillo, Yalile Srouf

**Lugar:** UTN - FRBA, IES N°1 "A. M. de Justo", INS del Profesorado Técnico - UTN - FRBA, Esc. Sup. de Comercio "Carlos Pellegrini" - UTN - FRBA, Esc. Sup. de Comercio "Carlos Pellegrini"

**Categoría:** Relato de experiencias

**Nivel:** Universitario

---

#### Introducción al cálculo diferencial e integral utilizando un recurso informático

Distintas investigaciones y publicaciones concuerdan acerca de la complejidad en la formación de futuros profesionales al considerar los cambios permanentes a los que éstos deberán enfrentarse, lo cual implica una formación integral que no puede dejar de considerar los avances técnicos y tecnológicos de nuestra época.

En particular, en lo que a Matemática se refiere, el aprendizaje por parte de los estudiantes va más allá de la aplicación de reglas y algoritmos; incluye que entiendan el significado de las ideas matemáticas y desarrollen estrategias y formas de pensar consistentes con el quehacer matemático. Actividades como visualizar, representar y formular relaciones matemáticas aparecen como centrales en las últimas propuestas del curriculum matemático de acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics.

Esta problemática de la enseñanza de la matemática a nivel superior en carreras aplicadas se evidencia en los altos índices de reprobación y en las actitudes de temor, de pasividad y de desinterés que muestran muchos estudiantes, entre otras. Las dificultades con las que nos enfrentamos a diario al desarrollar los contenidos propios de nuestra disciplina y al analizar los resultados poco satisfactorios que observamos, nos llevan a reflexionar y a cuestionar nuestra práctica docente.

Esta formación universitaria actual debe ser capaz de, partiendo del papel que tienen los medios en el proceso de enseñanza y sobre la base de requerimientos pedagógicos, utilizar todo tipo de recursos en el lugar que les corresponda con el fin de favorecer el logro de los objetivos que se propone.

Teniendo en cuenta estas consideraciones acerca de la formación profesional y las problemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la

Matemática, se formó en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional un grupo de investigación “El uso de Mathematica en el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial e integral en carreras de Ingeniería” con el objeto de analizar y describir las ventajas y desventajas del uso del software Mathematica en la aplicación de conceptos matemáticos en las asignaturas Análisis Matemático I y II, y evaluar los resultados de su utilización en la adquisición de saberes y en la representación gráfica, algebraica y numérica. Se espera que los estudiantes, como futuros profesionales, posean un manejo integral de la Matemática, contando con la tecnología como una de las herramientas de las que disponen, que les permita desarrollar la capacidad de transferencia de sus conocimientos.

A partir del análisis realizado respecto del programa Mathematica y de la elaboración de guías de trabajos prácticos para su aplicación, es nuestra intención en la presentación del presente trabajo exponer y compartir con otros docentes:

- el tipo de actividades que contribuyen a generar un ambiente donde los estudiantes tengan la oportunidad de plantear sus argumentos de resolución,
- el análisis respecto de las ventajas y desventajas en la utilización de una herramienta informática que se encontraron en la resolución de algunas actividades,
- algunas de las conclusiones a las que se han podido arribar a partir de la implementación de las actividades con grupos de estudiantes, alumnos de 1° año de las carreras de Ingeniería, en sus distintas especialidades.

Estas actividades se inician e incluyen conceptos básicos que sirven a modo de introducción al cálculo diferencial e integral, y que permiten una revisión y articulación con los contenidos de la Educación Media, y evolucionan respecto de los contenidos propios de la asignatura Análisis Matemático I pudiendo apreciar las ventajas que la representación gráfica y la visualización presentan en asignaturas como Análisis Matemático II, que si bien no son objeto específico de la presentación en este trabajo, son de interés en la investigación que estamos realizando.

**Autores:** Nélica Aguirre  
**Lugar:** Universidad Nacional de Río Cuarto  
**Categoría:** Propuesta de Enseñanza  
**Nivel:** Universitario

---

Las series de Fourier en la modelación matemática de registros electrocardiográficos normales

El diagnóstico, el seguimiento de terapia y el pronóstico de las enfermedades cardiovasculares se suele basar en un examen rápido y confiable llamado electrocardiograma (ECG). Un ECG registra la variación de voltaje cardíaco con respecto al tiempo.

El objetivo que se persigue con la actividad que se presenta es que los estudiantes conozcan y describan el proceso de funcionamiento cardíaco como un fenómeno que puede ser modelado matemáticamente, analicen de manera gráfica y analítica el comportamiento del fenómeno en cuestión y hagan predicciones sobre el mismo.

El trabajo está organizado siguiendo las etapas que recorrerán los estudiantes una vez planteada la situación problemática: en la parte inicial se presenta la electrofisiología del corazón, la anatomía del sistema de conducción y los tipos de ondas que se registran. Posteriormente se construye el modelo matemático que se utilizará para describir el registro de un ECG normal, con su desarrollo matemático basado en el uso de las series de Fourier y las simulaciones obtenidas. Finalmente, se muestran algunos gráficos de electrocardiogramas que serán comparados por los estudiantes con aquellos con condiciones de normalidad a los fines de detectar posibles anomalías cardíacas.

**Autores:** Antonio SÁngari, Letizia López  
**Lugar:** Departamento de Matemática-Facultad de Ciencias Exactas-Universidad Nacional de Salta  
**Categoría:** Propuesta Educativa  
**Nivel:** Universitario

---

#### El cubo de Rubik como herramienta de enseñanza

Este trabajo es la descripción y análisis de un curso de extensión implementado en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta. Tiene como propósito exponer una metodología de trabajo para la enseñanza de algún tema de Matemática y además dar herramientas para la exploración de temas de teoría de grupos. Este propósito se cumple usando los recursos visuales y de computación del soft *Mathematica* con la adición de un paquete llamado *AbstractAlgebra* que provee código de programación para trabajar con estructuras en álgebra abstracta.

La utilidad de este trabajo para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos en los que es necesario contar rápidamente con muchos ejemplos para poder formular conjeturas y luego testearlas, es evidente. El reconocimiento de esta utilidad la harán aquellas personas que se ayudan a entender un concepto mediante visualización y geométrización.

Para ejemplificar esta metodología, este trabajo describe una clase típica de teoría de grupos con herramientas informáticas, que trata el tema de permutaciones, donde se llega a varios resultados usuales en un primer curso de teoría de grupos.

Colateralmente el trabajo evidencia la necesidad de investigar las ventajas, y eventualmente las desventajas de coordinar este tipo de curso con herramientas de internet como son las plataformas e-learning.

**Autores:** Egle Elisabet Haye y María Elina Díaz Lozano

**Lugar:** Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas - Universidad Nacional del Litoral

**Categoría:** Propuesta Educativa

**Nivel:** Universitario

---

Una propuesta didáctica para la interpretación geométrica en  $R^2$  de valores y vectores propios a través de la visualización

En muchos libros de texto de Álgebra Lineal, nos encontramos con que el tratamiento del tema valores y vectores propios de una matriz se realiza a partir de la introducción de definiciones formalmente, enfatizando luego procedimientos, técnicas y ejemplos para el cálculo de valores y vectores propios. Pero observamos, por ejemplo, que pocas veces se recurre al uso de imágenes visuales que ayuden a la comprensión de los conceptos de este tema. Por ello, las actividades didácticas que proponemos en este trabajo para los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la UNL, tienen el propósito de favorecer a través de la visualización y el uso de herramientas computacionales el estudio de la interpretación geométrica de los conceptos relacionados a valores y vectores propios específicamente en  $R^2$ .

---

**Autores:** Susana Peparelli, Nora Zón, Sabina Bigolin, Noelia Matos

**Lugar:** Universidad Nacional de Río Cuarto

**Categoría:** Propuesta Educativa

**Nivel:** Universitario

---

El pasaje del nivel medio al nivel universitario: un estudio en una asignatura de primer año del Profesorado en Matemática

La currícula del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto contempla, en primer año, el dictado de la asignatura Matemática Discreta, que aborda fundamentalmente el trabajo en torno a relaciones de equivalencia y orden; números naturales, principio de inducción matemática, divisibilidad en enteros y relación de congruencia.

Durante los últimos años se han detectado algunos problemas que se consideran se deben fundamentalmente a la desarticulación entre las prácticas utilizadas en el nivel medio y las necesarias para lograr algún grado de destreza en el trabajo algebraico. Entre los indicadores de esta problemática

podemos mencionar el significativo porcentaje de deserción y serias dificultades en:

- La traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
- Los procesos de validación y búsqueda de contraejemplos.
- La comprensión de conceptos tales como inducción y recurrencia.
- La utilización del recurso algebraico como herramienta útil en la resolución de problemas tanto externos como internos a la Matemática.

Para abordar esta problemática, las docentes responsables del dictado de la asignatura incorporaron al estudio a dos alumnas del Profesorado en Matemática con un doble propósito; describir y analizar las propias vivencias en el cursado de la asignatura Matemática Discreta e iniciarlas en el proceso de elaboración de propuestas pedagógicas innovadoras.

En este trabajo compartiremos los avances realizados, a partir de lo realizado con dos grupos de alumnos, los ingresantes 2009 y 2010.

---

**Autores: Héctor Agnelli y Susana Peparelli**

**Lugar: Universidad Nacional de Rio Cuarto**

**Categoría: Propuesta Educativa**

**Nivel: Universitario**

---

#### Las paradojas, un vehículo para superar obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad

Existen numerosas investigaciones que provienen tanto del campo de la psicología como de la educación matemática relacionadas con heurísticas, sesgos y obstáculos en el abordaje de problemas probabilísticos. En estas investigaciones se sostiene que los estudiantes llegan a un curso de probabilidad con un bagaje de ideas acerca de la misma que han incorporado a través de experiencias informales de su vida cotidiana (Garfield y Ahlgren 1988). Así, pueden desarrollar su propia manera de razonar acerca de eventos cuya ocurrencia está caracterizada por la incertidumbre (Kahneman y Tversky, 1973; Kahneman, Slovic, y Tversky 1982; y Konold 1991) y en consecuencia este proceso previo dificulta la comprensión correcta de la probabilidad formal. Muchas de las concepciones erróneas acerca de la probabilidad que tienen los estudiantes no se modifican con los procesos de enseñanza y aprendizaje (Konold 1995). Si tenemos en cuenta, además, que la teoría de la probabilidad es un campo especialmente rico en paradojas, podemos pensar que estas verdades que chocan tan fuertemente con el sentido común y

que resultan difíciles de creer aún después de habernos enfrentado con sus pruebas, pueden ser útiles también en el aula.

Consideramos, entonces, que el tratamiento de paradojas y cuasi-paradojas puede aportar elementos que permitan superar los conflictos con los que se enfrentan los alumnos al abordar el aprendizaje de las nociones probabilísticas. El análisis de las paradojas y cuasi-paradojas y sus resoluciones, permite considerar a las mismas como referentes de distintos campos de problemas y vehículo para generar situaciones de enseñanza que posibiliten la evolución de los conocimientos del alumno e integren el rechazo de obstáculos como parte del significado de un nuevo saber.

En este trabajo se presentaran algunas paradojas y cuasi-paradojas clásicas, señalando su *potencialidad educativa*, concluyendo con la determinación del significado de la probabilidad involucrado en cada una de ellas, los conceptos de la teoría de la probabilidad que contribuyen a su dilucidación y el obstáculo, heurística y/o sesgo que permitiría problematizar y por ende superar.

---

**Autores:** Gustavo Adolfo Juarez, Natalia Romina Olmos, Julia Dalila Cabeza, Silvia Inés Navarro

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de Catamarca

**Categoría:** Propuesta Educativa

**Nivel:** Universitario

---

#### Modelado geométrico de una vasija de la cultura Aguada

Continuando con el objetivo propuesto en la Asignatura Modelos Matemáticos del Profesorado en Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Catamarca, de formar al alumno en la creación de modelos en Matemática Ambiental, se propuso el Estudio y Análisis de las vasijas de una de las Culturas más representativas que habitaron nuestro suelo.

En este primer resultado se refleja el trabajo realizado por alumnos que cursaron el ciclo 2009. Aquí se muestra la realización de un Modelado Geométrico de una Vasija desarrollado desde una investigación interdisciplinaria, y con una gran demostración en la capacidad para la deducción y manejo de temas de su formación básica en Matemática adquirida en la carrera. Considerando que es una de las últimas asignaturas en el plan de estudio, se desarrolla como integradora de contenidos.

**Autores:** Marta Caligaris y Georgina Rodríguez

**Lugar:** Grupo de Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional

**Categoría:** Propuesta Educativa

**Nivel:** Universitario

---

### Herramientas visuales para la enseñanza de funciones

Hay ciertos temas de matemática que deberían venir incorporados en el bagaje de conocimientos que traen los alumnos cuando ingresan a la universidad, como por ejemplo el concepto de función inversa, traslaciones y dilataciones/contracciones de funciones, función exponencial y logarítmica, entre otras.

En algunos casos, estos temas forman parte del contenido de los cursos de nivelación que se dictan a los ingresantes. En otros casos, forman parte del contenido curricular de materias, como Análisis Matemático I. En este último caso, el trabajar estos temas dentro del horario programado, quita espacios para dictar contenidos propios de la asignatura, nunca antes vistos.

Por ello, aprovechando las NTICs (nuevas tecnologías de la información y comunicaciones), y el hecho de que cada día el acceso a la red está disponible para una mayor cantidad de alumnos, el Grupo de Ingeniería & Educación (GIE) está trabajando en el desarrollo de herramientas que asistan a los alumnos en su proceso de aprendizaje. En este trabajo se mostrarán herramientas diseñadas con software libre, que pueden ser utilizadas como base en el repaso o en la enseñanza del tema funciones en la asignatura Análisis Matemático I.

**Autor:** Virginia Montoro

**Lugar:** Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue

**Categoría:** Trabajo de investigación

**Nivel:** Universitario

---

#### Estudio de las concepciones de estudiantes de profesorado sobre la demostración

El trabajo reseña los resultados obtenidos en una exploración de las concepciones de estudiantes de profesorado de Matemática sobre la *demonstración matemática* realizada en dos proyectos de investigación. *La demostración en geometría en la formación de profesores* y *El aprendizaje de la demostración en geometría*. En estos proyectos nos propusimos, como objetivo general, el estudio del proceso de aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes de Profesorado de Matemática, en el contexto de problemas de geometría y como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos/as estudiantes sobre la demostración matemática.

Como base para esta investigación, se les propuso a estudiantes del Profesorado de Matemática del Centro Regional Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue; al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano, tareas relacionadas con *demostrar* y se los entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas a fin de profundizar la indagación sobre sus concepciones sobre la *demonstración matemática*.

En primera instancia se realizó una caracterización de lo/as participantes según las palabras que asocian a los términos *demonstración* y *justificación*. Luego se realizó una categorización de las producciones de esto/as estudiantes frente a las tareas de demostrar propuestas y se obtuvo información sobre *qué tipo de pruebas* realizaban cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría.

Posteriormente y con el fin de delinear aspectos de las concepciones de lo/as participantes sobre el *aprendizaje* de la demostración se analizaron sus respuestas a algunas preguntas abiertas de la entrevista y mediante la interpretación del léxico utilizado se pusieron de manifiesto aspectos de las concepciones de lo/as estudiantes sobre *qué significa demostrar* en matemática, y si significa lo mismo en todas las ramas de la misma y en otras ciencias. Por último se estudiaron las prácticas argumentativas que producen esto/as estudiantes frente a la consigna *demostrar* y frente a la consigna *justificar*; y la relación con sus concepciones sobre la demostración.

Se presentan, además de la reseña de resultados propuesta, relaciones entre estos resultados y conclusiones generales sobre las concepciones de lo/as estudiantes de Profesorado sobre la demostración matemática.

Las concepciones sobre la demostración de los futuros profesores de matemática distan de ser simple y uniforme y es un punto importante a tener en cuenta por los interesados en la formación de los futuros docentes de matemática. Reconocer esta multiplicidad de significados y componentes nos sitúa en mejores condiciones para estudiar su evolución en el aprendizaje de lo/as estudiantes y para colaborar en el aprendizaje de este procedimiento esencial del método matemático.

---

**Autores:** María Teresa Juan y Virginia Montoro

**Lugar:** Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue

**Categoría:** Trabajo de Investigación

**Nivel:** Educación Secundaria

---

¿Cuántos? ¿Infinitos? Tendría que pensarlo...

En el presente trabajo comunicamos una forma de análisis de las respuestas solicitadas a 195 estudiantes de nivel medio de tres establecimientos educativos de la ciudad de San Carlos de Bariloche, a efectos de conocer sus concepciones respecto a aspectos muy simples del infinito matemático o actual y en un contexto de conteo. Las edades de estos estudiantes oscilan entre los 13 y los 19 años.

Con el objetivo de hallar indicadores de las concepciones de estos alumnos de nivel medio respecto de la noción de *infinito matemático*, habíamos administrado por escrito un cuestionario semiestructurado.

Hemos realizado una clasificación de los estudiantes, descriptos a partir de sus respuestas a este cuestionario, posterior a un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM). Este método consiste, básicamente, en un *método jerárquico ascendente* que comienza con una partición del conjunto de los 195 sujetos de manera que cada uno de los sujetos sea el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupa en una nueva clase aquellas dos clases "*más parecidas*" (*semejantes*), en el sentido que posean casi las mismas asociaciones con los modos de respuesta. Nuestra clasificación determinó cuatro clases que muestran un abanico de respuestas que van desde:

- las *respuestas correctas*, dadas por los estudiantes mayores, que se asocian a las ideas de que con una cantidad finita de elementos que

se repiten es posible construir una colección infinita; que un conjunto infinito no necesariamente posee todos los elementos y que un conjunto muy abundante no tiene por qué ser infinito.

Pasando por:

- la *inseguridad en la respuesta*.

Siguiendo por:

- las *respuestas incorrectas*, que agrupa la idea de que solo partiendo de muchos elementos puedo obtener infinitos y que un conjunto con gran cantidad de elementos es infinito.

Por último:

- las *no-respuesta*, que aglutina a los estudiantes que no responden.

Encontramos que las respuestas correctas se encuentran muy vinculadas entre sí en el sentido que quienes responden correctamente lo hacen prácticamente en todas sus respuestas. En cuanto a la no respuesta, encontramos que se diferencia del tipo de respuestas que representan inseguridad, en que a estas últimas expresan esta inseguridad a través de las justificaciones presentes de las respuestas dadas, mientras que la no respuesta también se manifiesta como no respuesta en cuanto a la justificación.

Consideramos que concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción, ya que el infinito es un concepto que carece de correlato directo en la naturaleza y su comprensión requiere, por ende, tratar las cantidades de modo muy diferente al que es habitual al interactuar con colecciones finitas. La noción de infinito matemático no es una noción intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas.

**Autores:** Marta Bastán y Cecilia Elguero  
**Lugar:** Universidad Nacional De Río Cuarto  
**Categoría:** Trabajo de investigación  
**Nivel:** Primario - Secundario

---

La ampliación del campo numérico en la educación de adultos. Un estudio de caso

El trabajo que se presenta forma parte de una investigación en la cual se estudian relaciones que los adultos establecen con el saber matemático número racional. La intencionalidad del estudio es aportar elementos para determinar condiciones que debiera contemplar una propuesta didáctica en torno a la ampliación del campo numérico en el escenario de escolar de la Educación de Jóvenes y Adultos del nivel medio.

Particularmente en este trabajo se reporta un estudio realizado en la comunidad de trabajadores de la costura, en el cual se indagan y analizan usos del número racional en actividades prototípicas del oficio y significaciones que se construyen a partir de tales usos.

El marco teórico que sustenta la investigación es la *Aproximación Socio-epistemológica*, la cual toma como postulado esencial que los sujetos construyen y adquieren nociones matemáticas producto de *prácticas sociales* que desarrollan en el seno de una comunidad como respuesta a problemáticas que se plantean en la misma.

La investigación muestra que en el contexto de las actividades prototípicas de la costura se usan fracciones y decimales con significados particulares que el mismo escenario laboral impregna. El estudio de los usos de los racionales en este ámbito laboral ha contribuido para conocer cómo “viven” estos números en escenarios extraescolares y para reflexionar sobre lo que se construye fuera de la escuela desde una perspectiva didáctica.

**Autores:** Viviana Carolina Llanos, María Rita Otero, María Paz Bilbao  
**Lugar:** Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología.  
**Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNCP-BA. CONICET**  
**Categoría:** Trabajo de investigación  
**Nivel:** Secundario

---

Argumentación y concepciones de la matemática: Un análisis de los libros para estudiar matemática en el nivel medio

Este trabajo describe y analiza posibles modificaciones en la Argumentación Matemática que presentan (N=137) libros escolares para el Nivel Medio editados entre los años 1940 y 2007. Los textos más utilizados y representativos del Nivel Medio en el Sistema Educativo Argentino se seleccionan mediante muestreo intencional. A partir de categorías y subcategorías de análisis se realiza una descripción cualitativa de las características de los libros y de la Argumentación. Luego, siguiendo los criterios del Análisis Exploratorio de Datos se realiza una clasificación que agrupa al conjunto de textos considerados.

El análisis de los libros permite observar diferentes maneras de fundamentar y concebir a la Matemática de acuerdo al año de edición de cada ejemplar. Este cambio en las concepciones acerca de la Matemática como ciencia y de los diferentes tipos de razonamientos que se refleja en los textos, se describe mediante las Tradiciones en el sentido propuesto por Klimovsky y Boido (2005). Se identifican modificaciones en la forma de iniciar la Argumentación, en los tipos de razonamientos empleados en los libros y en las situaciones que se proponen relacionadas con la manera de concebir a la Matemática. También hay cambios en la cantidad y calidad de imágenes que emplean los ejemplares de ediciones recientes.

**Autores:** Blanca Formeliano, Antonio Aparicio, Silvia Baspiñeiro, Jorge Correa, Nilda G. Méndez, Margarita L. Palma, Yolanda H. Villarroel

**Lugar:** Universidad Nacional de Salta. Facultad de Ciencias Exactas - Instituto de Educación - Escuela Provincia de Salta - Escuela Fray Luis Beltran - Colegio N° 5033

**Categoría:** Trabajo de investigación

**Nivel:** Secundario

---

#### Propuesta de capacitación para la enseñanza de la Geometría

La Geometría es un tema ausente, presentado en forma desarticulada sin la adecuada secuenciación y sistematización en la escuela primaria y secundaria. Los contenidos desarrollados se repiten en distintos años sin mayor complejidad y en otras su enseñanza tiene algunos vicios.

Teniendo en cuenta los aspectos didácticos y los desafíos que plantea su enseñanza, se presenta una propuesta de capacitación cuyos objetivos se organizaron en tres ejes: reflexión sobre la importancia de la enseñanza de la Geometría, el desarrollo de actividades que funcionarán como generadoras de propuestas didácticas, acompañadas del análisis didáctico correspondiente, el diseño de secuencias didácticas que se pusieron en práctica y la devolución con el trabajo de los alumnos.

Se presenta un encuentro y sus respectivas actividades para ejemplificar la intencionalidad didáctica de la propuesta de capacitación, proponemos el trabajo con recursos muy versátiles para usar incluso desde el nivel inicial.

Las actividades seleccionadas:

- pretenden un trabajo en geometría de acción, construcción y reflexión por parte del docente primero.
- propician el análisis de los elementos y propiedades de las figuras,
- requieren del docente una adecuada selección teniendo en cuenta el año al que se destina la actividad y la manipulación de las variables didácticas para generar otras actividades.

**Autores:** María Alejandra Bondaz, Marcela Götte, Sara Scaglia  
**Lugar:** Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral  
**Categoría:** Trabajo de investigación  
**Nivel:** Secundario

---

#### Poliedros: su enseñanza en la educación obligatoria

El trabajo que presentamos tiene como objetivo general el diseño, implementación y evaluación de una propuesta didáctica para el tratamiento de los sólidos arquimedianos mediante el uso de un software de geometría dinámica. Dicha propuesta se implementará en un segundo año de la escuela secundaria. Se adopta como metodología de investigación la ingeniería didáctica, centrándonos en esta ponencia en la fase del análisis preliminar que se lleva a cabo a través de distintos focos: análisis de libros de texto, estudio de bibliografía específica de geometría y de las particularidades de la enseñanza de la geometría espacial y mediante una encuesta a docentes. Nos centramos en esta ponencia en los dos primeros focos mencionados.

El análisis de los libros de texto permitió conocer la forma del tratamiento de los temas que nos atañen, identificando posibles causas de errores, dificultades y obstáculos que son señalados por los autores consultados.

---

**Autores:** Lidia Ibarra, Blanca Formeliano, Mirta Velásques, Florencia Alurralde, Graciela Méndez, Ivone Patagua, Cecilia Luna.  
**Lugar:** Consejo de Investigación. Universidad Nacional de Salta.  
**Categoría:** Trabajo de investigación  
**Nivel:** Primario - Secundario

---

#### Los textos escolares como obras matemáticas: análisis de las actividades geométricas

El análisis de libros de textos es uno de los aspectos a tener en cuenta, para comprender parte del sistema de enseñanza de la matemática en una institución determinada. Las preguntas que orientaron el análisis de los libros de textos fueron :

¿Por qué analizar los textos?; ¿qué saberes son los que entran a la escuela?; ¿qué procesos transpositivos se producen en las obras matemáticas para ser enseñadas?; ¿qué papel juega la actividad de resolución de problemas en la enseñanza?; ¿qué conceptos aparecen en la resolución de los problemas

propuestos por el autor?; ¿cómo justifica/n el/los autor/res los procedimientos utilizados para resolver los problemas?

La elección de los saberes a ser enseñados es el primer momento del proceso de transposición escolar. Los contenidos son obras matemáticas muy amplias, por ello restringimos a un tema determinado de geometría, focalizando, en la construcción de triángulos en el séptimo año de la actual escuela primaria.

El objetivo del trabajo es analizar las actividades propuestas en los libros de textos alrededor de la construcción de triángulos para dar respuesta a las preguntas planteadas dentro del marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

El recorrido del análisis de los textos escolares se realizó teniendo en cuenta los siguientes puntos:

- La incidencia de las últimas reformas del Sistema Educativo en Argentina en los libros de textos. Los contenidos curriculares y los libros de textos.
- Análisis de los manuales desde la teoría antropológica.
- Análisis praxeológico alrededor de las actividades de construcción de triángulo: identificación de tipo de tareas, tipos de técnicas, tecnología y la teoría asociada a la técnica y a las tecnologías de dichas técnicas.
- Ejemplos de un estudio comparativo en los libros de textos.
- Conclusiones.

**Autores:** Ana María Ruiz, María Inés Rodríguez

**Lugar:** Universidad Nacional de San Juan - Universidad Nacional de Río Cuarto

**Categoría:** Trabajo de investigación

**Nivel:** Medio

---

#### Análisis de argumentos en situaciones de azar

Numerosas investigaciones referidas a la didáctica de la estadística utilizan, como recurso metodológico para la obtención de la información, cuestionarios elaborados por especialistas y destinados a tal fin. Generalmente, estos cuestionarios plantean opciones para cada uno de los ítems, las que, si son acompañadas de una fundamentación en su elección, permiten analizar el tipo de razonamiento que las sustenta. La simple consideración de las respuestas correctas nos puede llevar a consideraciones engañosas, pues se puede optar por una respuesta correcta siguiendo un razonamiento correcto o incorrecto.

Considerando que al enfrentar situaciones de tipo aleatorio se activa un razonamiento que involucra algunas ideas probabilísticas básicas, mostramos el tipo de indagación que se lleva a cabo en estudio de las heurísticas que presentan estudiantes de nivel medio (17-18 años), con y sin instrucción en la temática, al responder cuestiones que les requieren juzgar la probabilidad de eventos y sobre los errores que tienen lugar en ello.

En la aplicación que motiva este trabajo se tomó un cuestionario que es una adaptación del utilizado por Batanero y colaboradores (2001), cuyas respuestas permiten clasificar el tipo de razonamiento probabilístico instalado en los grupos experimentales. Mientras que las opciones de las respuestas incorrectas permiten detectar algún sesgo en particular, la elección de la respuesta correcta "supuestamente" indicaría un razonamiento del tipo normativo (correcto) por parte del alumno. Sin embargo esto no ocurre, generalmente, y nuestro interés en este trabajo está centrado en el análisis de las razones del alumno para elegir la respuesta correcta. Para ello nos limitamos, después de haber realizado el análisis estadístico de las comparaciones de las diferencias de las proporciones de respuestas correctas en ambos grupos y para cada ítem, mediante la técnica de los odds ratio (cociente de chances), a presentar los resultados de una clasificación de los argumentos de las respuestas correctas en categorías explicativas solamente para los ítems del cuestionario que mostraron diferencias a favor del grupo con instrucción.

Este análisis revela que, en los argumentos que sustentan las respuestas correctas en ambos grupos, se evidencia el uso de razonamiento normativo sólo en una pequeña proporción y se confirma con ésto los resultados

de algunas investigaciones internacionales que sugieren que los estudiantes evidencian gran dificultad en el uso del razonamiento probabilístico, aún después de instrucciones formales (Lecoutre, B, 2006; Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J.J. y Cañizares, M. J., 2001), entre otros.

---

**Autores:** Silvia Inés Navarro y Gustavo Adolfo Juarez

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad Nacional de Catamarca

**Categoría:** Trabajo de investigación

**Nivel:** Terciario - Universitario

---

Aporte al modelado matemático en etnomatemática: ajuste lineal con restricción

El método de mínimos cuadrados como herramienta en el ajuste de curvas es muy conocido, aquí pretendemos extender el mismo ante la propuesta de que el ajuste este dado por una recta que pase por un punto determinado dentro de los datos dados. Este trabajo de investigación permite llevar un contenido al área de la Matemática Aplicada, mediante un aporte a la creación de Modelos Matemáticos, como asignatura de la Carrera Profesorado en Matemáticas.

En particular surge como necesidad de unir las trazas de gráficas asignadas por tramos, precisamente en puntos donde se produce el cambio de asignación de expresiones polinómicas ajustadas. Tal problema surge al ajustar la silueta de vasijas de barro confeccionadas por aborígenes que poblaron en el Valle de Catamarca en el periodo entre los años 600 y 900 de nuestra era, conocida como Cultura Aguada.

Tales vasijas, presentan una forma casi regular por lo que se decidió estudiarlas como superficies de revolución; previamente se planteo la investigación de su silueta en el plano, observándose cambios en su aproximación de rectas a parábola o cúbicas, por lo que, en el cambio de asignación presentaban en la modelización discontinuidad, motivando a efectuar ajustes con restricción.

**Autor:** Tatiana Inés Gibelli  
**Lugar:** Universidad Nacional de Río Negro - Viedma  
**Categoría:** Trabajo de investigación  
**Nivel:** Ingreso Universitario

---

Conocimientos matemáticos de alumnos ingresantes a la universidad.  
Análisis de evaluaciones de ingreso

En este trabajo se analiza el rendimiento de los alumnos en las evaluaciones de ingreso en el área matemática de la Universidad Nacional de Río Negro en el año 2010. El programa de ingreso implementado este año, brindó distintas opciones para rendir un examen de ingreso, que es de carácter eliminatorio, en las dos áreas consideradas Lengua y Matemática: en evaluaciones voluntarias que el alumno podía rendir con conocimientos adquiridos previamente o en evaluaciones regulares para alumnos que asistieran a un curso intensivo de cinco semanas donde se hacía una revisión de los contenidos a evaluar. Se observó un aumento en los porcentajes totales de aprobación del examen regular respecto a los voluntarios, lo cual muestra la utilidad del curso intensivo de ingreso para repasar conceptos estudiados en nivel medio. Sin embargo, en ambos, se observa que se presentaron las mayores dificultades en los ejercicios que requerían manejo algebraico. Puede pensarse, entonces, que las dificultades algebraicas son difíciles de superar con cursos de ingreso de carácter intensivo y que será necesario revisar de que manera se presentan estos temas en el nivel medio.

**Autores:** Jorge Azpilicueta, Alicia Ledesma, José Galoppo

**Lugar:** Córdoba

**Categoría:** Trabajo de investigación

**Nivel:** Universitario

---

Evaluación del aprendizaje de la matemática en modalidad virtual en el ingreso a carreras de ciencias exactas, físicas y naturales

En una situación educativa de aprendizaje de la Matemática en Aula Virtual en el Ciclo de Nivelación de las carreras de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales la prioridad es el desempeño del alumno. Esto supone autoaprendizaje, desarrollo del pensamiento crítico y creativo, y realizar un trabajo colaborativo mediante las TICs y tutorías virtuales.

El objetivo de esta investigación es evaluar el proceso de aprendizaje de una muestra de alumnos ingresantes (2010), de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, en el estudio de la lógica simbólica, números reales, polinomios, funciones lineal y cuadrática, ecuaciones y trigonometría.

La aprobación del examen para acreditar este curso, si bien es presencial, viene mediada por la aplicación de la modalidad virtual. Como conclusión se puede observar que los alumnos que optaron por esta modalidad virtual para el módulo de Matemática, tuvieron un porcentaje mayor de aprobación, respecto de los que optaron por otras modalidades (con o sin curso presencial). Se puede inferir que la implementación de esta modalidad es superadora, en tanto se consideren todas las instancias en la conclusión final de esta investigación, relacionados con: dedicación al estudio, calidad de los recursos didácticos, diseño pedagógico, interés de los cursantes, sistema de evaluación, estrategias/acciones para el desarrollo de competencias y refuerzo de la función tutorial.



# Comunicaciones Científicas UMA 2010

Universidad Nacional del Centro  
de la Provincia de Buenos Aires  
Tandil



# Álgebra y Teoría de Números

*Organizan:*

*Fernando Cukierman, Sonia Natale y José Araujo*



Conferencia Invitada  
Teresa Krick  
Universidad de Buenos Aires

---

### Nullstellensatz Aritmético

En este trabajo en curso, presentamos nuevos resultados para el Nullstellensatz efectivo aritmético. En particular obtenemos lo siguiente, donde se recuerda que la altura  $h(f)$  de un polinomio  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  es el logaritmo del máximo de los valores absolutos de sus coeficientes:

**Teorema.** Sean  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$   $s \leq n + 1$  polinomios no constantes sin ceros comunes en  $\mathbb{C}^n$ , y sean  $d_i := \text{gr}(f_i)$  y  $h_i := h(f_i)$  para  $1 \leq i \leq s$ . Entonces existen  $\alpha \in \mathbb{N}$  y  $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  tales que

$$\alpha = g_1 f_1 + \dots + g_s f_s$$

con

- $\text{gr}(g_i f_i) \leq d_1 \cdots d_s$ ,
- $\log(\alpha), h(g_i) + h(f_i) \leq d_1 \cdots d_s \left( \sum_{k=1}^s \frac{h_k}{d_k} + (4n + 12) \log(n + 2) \right)$ .

Este resultado mejora fundamentalmente los resultados previos [Phi90], [BeYg91-99], [KPS01], y es esencialmente optimal en los ejemplos conocidos que proveen cotas inferiores. Se extiende a un número arbitrario de polinomios, y también al Nullstellensatz en su forma fuerte.

En nuestro trabajo es obtenido como caso particular de un Nullstellensatz aritmético sobre variedades, para el cual éstas son las primeras cotas de altura en la literatura. Asimismo se obtienen los resultados análogos sobre cuerpos de funciones racionales (Nullstellensatz paramétrico).

Nuestro desarrollo sigue la construcción presentada por Z. Jelonek [Jel05] para el Nullstellensatz efectivo, extendiéndola al contexto aritmético. Con ese fin presentamos versiones aritméticas del teorema de Perron [Per27], i.e. cotas para los exponentes y coeficientes de la ecuación implícita de una hipersuperficie parametrizada por polinomios enteros. Estas se obtienen como consecuencia de teoremas de intersección, proyección y productos que desarrollamos para las alturas mixtas normalizadas de variedades en productos de espacios proyectivos, siguiendo la línea iniciada en [Rem01] y [PhSo08].

**BeYg91-99:** C.A. Berenstein, A. Yger, *Effective Bézout identities in  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$* , Acta Math. 166 (1991) 69-120. *Residue calculus and effective Nullstellensatz*, Amer. J. Math. 121 (1999) 723-796.

**Jel05:** Z. Jelonek, *On the effective Nullstellensatz*, Invent. Math. 162 (2005) 1-17.

- KPS01:** T.Krick, L.Pardo, M.Sombra, *Sharp estimates for the arithmetic Nullstellensatz*, Duke Math. J. 109 (2001) 521-598.
- Phi90:** P.Philippon, *Dénominateurs dans le théorème des zeros de Hilbert*, Acta Arith. 58 (1990) 1-25.
- PhSo08:** P.Philippon, M.Sombra, *Hauteur normalisée des variétés toriques projectives*, J. Inst. Math. Jussieu 7 (2008) 327-373.
- Rem01:** G.Remond, *Elimination multihomogène & Géométrie diophantienne multiprojective*, Cap. 5 & 7, *Introduction to algebraic independence theory*, Lecture Notes in Math. 1752 (2001), 53-81 & 5-131.

---

**Autores:** Manuela Blaum (a), Lisi D'Alfonso (b), Gabriela Jeronimo (b,c), Pablo Solernó (b,c)

**Lugar:** (a) Universidad Nacional de General Sarmiento, (b) Universidad de Buenos Aires, (c) CONICET

**Expositor:** Gabriela Jeronimo

---

#### Resultante de polinomios diferenciales multivariados

La *resultante* es una herramienta clásica en teoría de eliminación algebraica. Dada una familia de polinomios con coeficientes indeterminados, la resultante es un polinomio en los coeficientes del sistema que se anula para una elección particular de coeficientes cada vez que el sistema de ecuaciones polinomiales correspondiente tiene solución (ver, por ejemplo, [1]).

Esta noción, que se remonta a trabajos de Cayley y Sylvester del siglo XIX, fue generalizada por J.F. Ritt al contexto del Álgebra Diferencial en [4] para el caso de dos polinomios diferenciales ordinarios con coeficientes indeterminados en una variable. Posteriormente, en [2] se dio una definición alternativa de resultante diferencial siguiendo la construcción de Macaulay de la resultante algebraica aplicada a los polinomios dados y sus derivadas sucesivas en el caso de  $m + 1$  polinomios diferenciales ordinarios en  $m$  variables. A diferencia de la construcción de Ritt, no resulta evidente que esta nueva noción de resultante satisfaga ciertas propiedades fundamentales análogas a la del caso algebraico.

En esta comunicación, presentamos una nueva generalización del concepto de resultante diferencial para el caso de polinomios diferenciales ordinarios multivariados. Nuestro enfoque sigue el esquema original de Ritt: probamos la existencia de un (único) polinomio diferencial irreducible en los coeficientes de los polinomios diferenciales dados que caracteriza los sistemas de ecuaciones que tienen solución en un espacio apropiado. Finalmente, mostramos que aplicando las técnicas de [5] y [3] es posible obtener cotas

para el orden y el grado de la resultante diferencial introducida, lo que permite dar una reinterpretación puramente algebraica de este objeto que sirve de base para un algoritmo para su cálculo.

D. Cox, J. Little, D. O'Shea. Using Algebraic Geometry. Grad. Texts in Math., vol. 185, 1998. Springer-Verlag.

G. Carrá Ferro, A resultant theory for ordinary algebraic differential equations. Lecture Notes in Comput. Sci., Bol. 1255 (1997), 55-65.

L. D'Alfonso, J. Jeronimo, P. Solernó, On the complexity of the resolvent representation of some prime differential ideals. J. Complexity 22 (2006), 396-430.

J.F. Ritt, Differential equations from the algebraic standpoint. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., New York, Vol. XIV (1932).

B. Sadik, A bound for the order of characteristic set elements of an ordinary prime differential ideal and some applications. Appl. Algebra Eng. Comm. Comput. 10 (2000), no. 3, 251-268.

---

**Autores: María Isabel Herrero, Gabriela Jeronimo, Juan Sabia**

**Lugar: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Expositor: María Isabel Herrero**

---

#### Una descripción de las soluciones aisladas de sistemas polinomiales ralos no genéricos

La resolución efectiva de sistemas de ecuaciones polinomiales es un problema matemático de fundamental importancia, tanto desde el punto de vista práctico como teórico. En vistas de las aplicaciones, ha cobrado particular interés el estudio de sistemas polinomiales *ralos*, es decir, dados por polinomios que sólo involucran monomios en conjuntos prefijados.

Un resultado clave en este contexto es la cota debida a Bernstein ([1]) para la cantidad de soluciones aisladas en  $(\mathbb{C}^*)^n$  de un sistema ralo de  $n$  ecuaciones. Esta cota es exacta para sistemas *genéricos* y demostraciones constructivas de la misma han dado lugar a algoritmos eficientes para la resolución de estos sistemas ([2], [3]). En [4] se obtuvo una nueva cota para la cantidad de soluciones de sistemas ralos que, para sistemas no genéricos pero con cierta estructura, mejora la cota de Bernstein. Sin embargo, a diferencia de [1], el enfoque de [4] no es constructivo.

Presentaremos una caracterización de las soluciones aisladas en  $(\mathbb{C}^*)^n$  de los sistemas ralos considerados en [4]. El objetivo es la obtención algorítmica de estas soluciones con complejidades que reflejen las mejoras en la cota (trabajo en curso). Nuestra caracterización consiste en una descripción del

conjunto de las soluciones aisladas por medio de polinomios univariados que se obtienen a partir de una resultante asociada al sistema dado.

D.N. Bernstein, The number of roots of a system of equations. *Funct. Anal. Appl.* 9 (1975), 183-185.

B. Huber, B. Sturmfels, A polyhedral method for solving sparse polynomial systems. *Math. Comput.* 64, no. 212 (1995), 1541-1555.

G. Jeronimo, G. Matera, P. Solernó, A. Waissbein, Deformation techniques for sparse systems. *Found. Comput. Math.* 9 (2009), pp. 1-50.

P. Philippon, M. Sombra, A refinement of the Bernstein-Kushnirenko estimate, *Adv. Math.* 218, (2008) No. 5, 1370-1418.

---

**Autores: Alicia Dickenstein, Federico Martínez y Laura Matusevich**

**Lugar: UBA, Texas A& M University**

**Expositor: Federico Martínez**

---

Irregularidad de los sistemas  $A$ -hipergeométricos via soluciones de Nilsson

Sea  $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$  y  $\beta$  un parámetro arbitrario en  $\mathbb{C}^d$ . El sistema  $A$ -hipergeométrico de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales asociado  $H_A(\beta)$  (introducido a fines de los 80's por Gel'fand, Kapranov y Zelevinsky [5]) es siempre holónimo [5, 1]. Hotta demostró en [8] que  $H_A(\beta)$  es holónimo regular en el sentido de la teoría de  $D$ -módulos si el vector  $(1, \dots, 1)$  está en el subespacio fila de  $A$ . La recíproca de esta afirmación fue obtenida en [11] para parámetros  $\beta$  suficientemente genéricos, para los cuales no hay fenómenos de resonancia que produzcan soluciones con logaritmos. El caso de parámetros arbitrarios fue resuelto en [3] bajo la hipótesis de que las columnas de  $A$  generen un cono estrictamente convexo, mediante la descripción de las pendientes algebraicas del  $D$ -módulo asociado. El estudio de la irregularidad mediante series de Gevrey fue abordado en [7]. En este trabajo obtenemos una demostración elemental del resultado de Schulze y Walther vía el estudio de las soluciones de Nilsson del sistema asociadas a vectores de peso positivos. Definimos un operador de homogeneización para toda elección de  $\beta$ , que nos permite comparar las soluciones de Nilsson de  $H_A(\beta)$  con las soluciones de un apropiado sistema regular, extendiendo resultados de [9], y combinamos nuestros resultados con un teorema reciente de Berkesch [2].

Adolphson, A. *Hypergeometric functions and rings generated by monomials*. *Duke Math. J.*, 73(2) (1994), 269-290.

- Berkesch, C. *Euler–Koszul methods in algebra and geometry*. PhD thesis, Purdue University, 2010.
- Castro Jimenez, F., Fernandez Fernandez, M. *Gevrey solutions of the irregular hypergeometric system associated with an affine monomial curve*, arXiv:0811.3392, (2008), por aparecer: Trans. Math. Amer. Soc.
- Castro Jimenez, F., Fernandez Fernandez, M., *Gevrey solutions of irregular hypergeometric systems in two variables*, arXiv:0811.3390 (2008).
- Gel'fand, I.M.; Kapranov, M.; Zelevinsky, *Hypergeometric Functions and Toral Manifolds*, Funktsional. Anal. i Prilozhen, **23**, (1989), 12–26.
- Gel'fand, I.M.; Kapranov, M.; Zelevinsky, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Adv. Math., **84**, (1990).
- Fernández-Fernández, M. C. *Irregular Hypergeometric D-Modules*. Advances in Mathematics. Vol. 224, N. 5. (2010), 1735–1764
- Hotta, R., *Equivariant D-modules*, arXiv.org:math/9805021, in: *Proceedings of ICPAM Spring School in Wuhan*, 1991.
- Ohara, K.; Takayama, N. *Holonomic rank of A-hypergeometric differential-difference equations*. J. Pure Appl. Algebra, **213**(8) (2009), 1536–1544.
- Saito, M. *Logarithm-free A-hypergeometric series*. Duke Math. J., **115**(1):53–73, 2002.
- Saito, M.; Sturmfels, B.; Takayama, N., *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer-Verlag, 2000.
- Schulze, M.; Walther, U., *Irregularity of hypergeometric systems via slopes along coordinate subspaces*, Duke Math. J., (2008), 465–509.

---

**Conferencia Invitada**  
**Carina Boyallián**  
**Universidad Nacional de Córdoba**

---

### Clasificación de representaciones irreducibles sobre superálgebras de Lie conformes finitas simples

En esta charla se presentará un resumen sobre la clasificación de representaciones irreducibles sobre las superálgebras de Lie conformes simples finitas.

**Autores:** María Chara, Ricardo Toledano

**Lugar:** Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (UNL-CONICET)

**Expositor:** María Chara

---

### Torres moderadas de tipo Kummer asintóticamente buenas

Sea  $\mathbb{F}_q$  un cuerpo finito con  $q$  elementos. Un cuerpo de funciones  $F/\mathbb{F}_q$  es una extensión finita  $F$  del cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{F}_q(x)$ , donde  $x \in F$  es un elemento trascendente sobre  $\mathbb{F}_q$ .

Una torre de cuerpos de funciones es una sucesión  $\mathcal{F} = (F_0, F_1, \dots)$  de cuerpos de funciones sobre  $\mathbb{F}_q$  tales que:

- $F_0 = \mathbb{F}_q(x) \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$ ,
- $[F_{i+1} : F_i] < \infty$  para todo  $i \geq 0$  y
- $g(F_i) \rightarrow \infty$ , donde  $g(F_i)$  denota el género del cuerpo de funciones  $F_i/\mathbb{F}_q$ .

La teoría de torres de cuerpos de funciones sobre cuerpos finitos tiene importantes aplicaciones en teoría de códigos algebraicos. De particular importancia para estas aplicaciones es la construcción explícita de las torres. (Ver, por ejemplo, los trabajos [BGS, ST, ZI]).

En este trabajo estudiamos los problemas básicos asociados a la construcción explícita de torres asintóticamente buenas y mostraremos algunos ejemplos concretos de estas construcciones. Presentaremos resultados que permiten estimar el número de places que se descomponen completamente en una torre de cuerpos de funciones y veremos algunas aplicaciones de estos resultados al estudio del comportamiento asintótico de torres moderadas de tipo Kummer.

Bezerra, J., Garcia, A., Stichtenoth, H., *An explicit tower of function fields over cubic finite field and Zink's lower bound*. J. reine angew. Math. **589** (2005), 159-199.

Stichtenoth, H., *Algebraic Function Fields and Codes*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Zink, T., *Degeneration of Shimura surfaces and a problem in coding theory*. Lecture Notes in Comp. Sci., vol. 199, Springer, Berlin. 1985, 503-511.

**Autores:** Antonio Cafure, Guillermo Matera y Melina Privitelli  
**Lugar:** Universidad Nacional General Sarmiento - CONICET  
**Expositor:** Melina Privitelli

---

Singularidades de hipersuperficies simétricas y una aplicación a los códigos de Reed-Solomon

Sean  $\mathbb{F}_q$  el cuerpo finito de  $q$  elementos y  $\mathbb{A}^n$  el espacio afín definido sobre  $\mathbb{F}_q$ , la clausura algebraica de  $\mathbb{F}_q$ . En este trabajo estudiamos la dimensión de singularidades de ciertas hipersuperficies simétricas y caracterizamos la existencia de *deep holes* en códigos de Reed-Solomon.

Un *deep hole* es un vector  $v \in \mathbb{F}_q^n$  cuya distancia al código coincide con el radio de recubrimiento del mismo. Siguiendo el enfoque dado por [2] observamos que la existencia de *deep holes* se vincula con el hecho de que una hipersuperficie  $H \subset \mathbb{A}^n$  de grado  $d$  definida por un polinomio en los primeros  $d$  polinomios simétricos elementales posea puntos con coordenadas en  $\mathbb{F}_q$  (puntos  $q$ - racionales). Demostrando que la dimensión del lugar singular de  $H$  es a lo sumo  $d - 1$  y siguiendo las estimaciones de [2] mejoramos la caracterización obtenida en [2]. Nuestro resultado es el siguiente.

**Teorema.** Supongamos que  $q > d^2$ , que  $q > (k + 1)^2$  y que  $k > (\frac{2}{\epsilon} + 1)d$ . Si  $w_f$  es una palabra generada por un polinomio  $f$  de grado  $k + d$  entonces  $w_f$  no es un *deep hole*.

Este resultado, que se compara con el de [4], tiene el interés de abordar el problema desde una perspectiva geométrica.

A. Cafure, G. Matera and M. Privitelli. *Singularities of symmetric hypersurfaces and an application to Reed-Solomon codes*. Trabajo en progreso.

Q. Cheng and E. Murray, *On deciding deep holes of Reed-Solomon codes*, Theory and applications of models of computation (Berlin) (J.-Y. Cai, ed.), Springer, 296-305, 2007.

S. Ghorpade and G. Lachaud, *Étalé cohomology, Lefschetz theorems and numbers of points of singular varieties over finite fields*, Mosc. Math. J. 2 (2002), no. 3, 589-631.

Y. Li and D. Wan, *Error distance of Reed-Solomon codes*, Science in China Series A: Mathematics, Vol 51, 11(2008), 1982-1988.

**Autores:** Juan Pablo Rossetti, Juan Miguel Velasquez Soto

**Lugar:** FaMAF - UNC

**Expositor:** Juan Miguel Velásquez Soto

---

#### Sobre Retículos Cuantizadores en Dimensión 4

Bajo ciertas condiciones generales, un retículo (o lattice) en  $\mathbb{R}^n$  sirve como cuantizador vectorial, es decir, como convesor analógico-digital. En este caso se usa la celda de Voronoi de cada punto del retículo para convertir los puntos de la celda en el centro de la misma.

Por diversas razones, interesa minimizar el error promedio cometido en este proceso, la integral de las distancias al cuadrado en la celda de Voronoi es la forma más común de medir este error. Esta es la cantidad que se quiere minimizar, al variar los lattices.

El problema de hallar el retículo cuantizador óptimo solo ha sido resuelto en dimensiones 2 y 3. Como es de esperarse el lattice hexagonal es el mejor cuantizador en dimensión 2, mientras que en dimensión 3 el mínimo ocurre en el retículo de raíces  $A_3^*$  (ver [BS]).

En esta comunicación presentamos algunos adelantos logrados para el caso 4 dimensional, en especial mostramos una fórmula para el momento de inercia normalizado en *lattices de tipo I*. El trabajo se basa en resultados anteriores de Barnes para obtener el momento de inercia y de Conway-Sloane donde se describe cómo calcular el momento de inercia de politopos convesos.

Es de resaltar que dada la magnitud de las fórmulas, el uso del computador resulta esencial.

Barnes, E. S. The covering of space by spheres. *Canad. J. Math.* 8 (1956), 293–304.

Barnes, E. S.; Sloane, N. J. A. The optimal lattice quantizer in three dimensions. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 4 (1983), no. 1, 30–41.

Conway, J. H.; Sloane, N. J. A. Low-dimensional lattices. VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 436 (1992), no. 1896, 55–68.

**Conferencia Invitada**  
**Matías del Hoyo**  
**Universidad de Buenos Aires**

---

#### Funtores laxos y subdivisión baricéntrica

Las 2-categorías constan de objetos, morfismos entre los objetos y 2-celdas que son morfismos entre los morfismos. Por un lado modelan y organizan situaciones generales. Por otro lado constituyen estructuras algebraicas interesantes per se. Los funtores laxos son morfismos entre 2-categorías que no preservan toda la estructura. Esta noción emerge naturalmente y suele incluso ser más conveniente que la estricta. En esta charla daremos una construcción universal que vincula funtores laxos y estrictos. Para ello describiremos y usaremos la subdivisión de categorías.

---

**Autores: María Emilia Descotte**  
**Lugar: Universidad de Buenos Aires**  
**Expositor: María Emilia Descotte**

---

#### Una Teoría de 2-Ind-Objetos

El objetivo principal de este trabajo es extender a 2-categorías [4] la teoría de Ind-objetos de Grothendieck [1]. En particular, la construcción de la categoría  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  asociada a una categoría  $\mathcal{C}$ . El interés de esta extensión radica en las potenciales aplicaciones de este desarrollo a la teoría de homotopía y a la teoría de la forma fuerte (*strong shape theory*).

En una primera etapa, dados dos Ind-objetos  $X, Y$  de una 2-categoría  $\mathcal{C}$ , utilizando las construcciones de bicolimites filtrantes y bilimites de categorías [2], damos una estructura de categoría al conjunto de morfismos entre  $X$  e  $Y$ . De esta manera demostramos que en este caso la categoría  $\text{Ind}(\mathcal{C})$  resulta una 2-categoría.

En una segunda etapa introducimos la 2-categoría de 2-Ind-objetos de una 2-categoría  $\mathcal{C}$ . La diferencia entre este caso y el de Ind-objetos de una 2-categoría es que aquí el diagrama que describe al Ind-objeto ya no viene dado por una categoría filtrante de índices sino por una 2-categoría 2-filtrante de índices. Por lo tanto, para poder dar una descripción explícita de la categoría de morfismos entre dos 2-Ind-objetos es necesario utilizar las construcciones de los bilímites y los bicolímites 2-filtrantes de categorías [3].

Estamos trabajando actualmente en demostrar propiedades análogas a las de la categoría  $\mathcal{I}nd(\mathcal{C})$  (con  $\mathcal{C}$  una categoría) para las 2-categorías  $\mathcal{I}nd(\mathcal{C})$  y  $2\text{-}\mathcal{I}nd(\mathcal{C})$  (con  $\mathcal{C}$  una 2-categoría) introducidas en este trabajo.

[1] (J.L. Verdier M. Artin, A. Grothendieck. SGA 4 (1963-1964), Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas. Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 269, 1972.)

[2] (J.L. Verdier M. Artin, A. Grothendieck. SGA 4 (1963-1964), Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, Tome 2. Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 270, 1972.)

[3] (E. Dubuc and R. Street. A construction of 2-filtered bicolimits of categories. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques VOL 47; NUMB 2, pages 83-106, 2006.)

[4] (John w. Gray. Formal Category Theory: Adjointness for 2-Categories. Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 391, 1974.)

---

**Autores: Miguel Ottina**

**Lugar: Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Cuyo**

**Expositor: Miguel Ottina**

---

#### A-homología y A-homotopía

Los grupos de homología y homotopía de un espacio topológico  $X$  están relacionados por el teorema de Hurewicz, o más generalmente, por la sucesión exacta de Whitehead. Es natural pensar, entonces, que dado un espacio topológico  $A$ , los grupos de  $A$ -homotopía de un espacio  $X$  (que se definen como las clases homotópicas de funciones continuas de la  $n$ -ésima suspensión de  $A$  en  $X$ ) deberían tener su contraparte homológica. Con el propósito de encontrarla, en un trabajo reciente definimos una teoría de homología (a la que denominamos  $A$ -homología) y obtuvimos resultados que relacionan los grupos de  $A$ -homología con los grupos de  $A$ -homotopía tal como ocurre en el caso clásico.

En esta charla expondré la definición dada y los principales resultados obtenidos, entre los cuales se destacan un teorema estilo Hurewicz que relaciona los grupos de  $A$ -homotopía de  $X$  con sus grupos de  $A$ -homología y una versión  $A$ -homológica del famoso teorema de Whitehead sobre equivalencias débiles. También definiré morfismos de Hurewicz entre los grupos de  $A$ -homología y los grupos de  $A$ -homotopía y veremos cómo forman parte de una sucesión exacta larga que generaliza la sucesión exacta de Whitehead.

**Autores:** Eduardo Dubuc y Laura Pezzatti  
**Lugar:** Universidad de Buenos Aires  
**Expositor:** Laura Pezzatti

---

### Clasificación de aplicaciones recubridoras

Es bien conocido el teorema de clasificación de revestimientos si  $B$  es localmente arcoconexo y semi localmente simplemente conexo. Para poder generalizar este resultado a contextos más generales se necesita una definición adecuada de aplicación recubridora, y una construcción completamente diferente del grupoide fundamental  $\pi_1(B)$ . Esto ha sido desarrollado por Hernández Paricio en [5].

En este trabajo desarrollamos una nueva demostración de los resultados de [5] utilizando la teoría del descenso de Grothendieck [4] y técnicas de colímite filtrante, según los lineamientos presentados en [2]. La llave para esta prueba consiste en la demostración de la equivalencia entre los datos que determinan una aplicación recubridora y los datos sobre una familia de conjuntos que determinan un dato de descenso del nervio de Čech del cubrimiento.

El grupoide fundamental que se construye en este trabajo, utilizando los datos de descenso, generaliza el clásico de Poincaré, y contrariamente con aquel, resulta también adecuado para espacios con deficientes propiedades de arcoconexidad local.

Hemos elegido para esta comunicación ilustrar esta construcción con el ejemplo del círculo de Varsovia, cuyo  $\pi_1(B)$  clásico es nulo, mientras que el que resulta de esta construcción es el grupo  $\mathbb{Z}$  de números enteros, que detecta precisamente el agujero (único) del círculo.

- M. Artin and B. Mazur, *Étalé Homotopy*, Lectures Notes in Math. 100, Springer, Berlin, 1970  
E. J. Dubuc, *Covering Projections via descent Theory*, SECA III, Santiago de Compostela, 2005, <http://www.usc.es/congresos/seca3/Abstracts/Dubuc.pdf>  
R. H. Fox, *Shape theory and covering spaces*, Lectures Notes in Math. 375, Springer, 1974, 71-90.  
A. Grothendieck, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA1)*, Lectures Notes in Math. 222, Springer, Berlin 1971.  
L. J. Hernández-Paricio, *Fundamental pro-groupoids and covering projections*, Fund. Math., 156 (1998), 1-31.

**Autores:** José Araujo - Karina Paz  
**Lugar:** UNCPBA - Tandil  
**Expositor:** Karina Paz

---

### Modelos de Gelfand para grupos de tipo $G(m,p,n)$

Un modelo de Gelfand para un grupo finito  $G$ , es una representación  $\rho$  ordinaria del grupo cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de  $G$ . Distintos tipos de construcciones de modelos de Gelfand fueron presentados. Los modelos por involuciones estudiados por Baddeley en [6] y Vinroot en [9], la construcción de Kodiyalam y Verma para el grupo simétrico dada en [8], muy asociada con la dada en [1] por Adin, Postnikov y Roichman para el grupo simétrico generalizado o grupo de reflexiones de tipo  $G(m, 1, n)$ . El modelo polinomial introducido en [2] funciona para grupos de reflexiones de tipo  $I_2(n)$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_{2n+1}$  y  $G(m, 1, n)$ , según los resultados en [3],[4] y [5]. Posteriormente, Shripad y Oesterlé en [8] establecen que  $N$  es un modelo de Gelfand si  $G$  no es de tipo  $D_{2n}$ ,  $E_7$  o  $E_8$ . Es decir, esta construcción incluiría más casos que los modelos por involuciones. El resultado: Se demuestra que el modelo polinomial  $N$  dado en [2], es modelo de Gelfand para un grupo de tipo  $G(m, p, n)$ , ( $p < 1$ ), en el caso que  $p$  no divide a  $n$ .

[1] Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y., A Gelfand model for Wreath Products. arXiv:math.RT/08022824 v1, 2008.

[2] Aguado, J. L. and Araujo, J. O., A Gelfand model for the symmetric group, Communications in Algebra, 29 (4), 1841 - 1851 (2001).

[3] Araujo, J. O., A Gelfand model for aWeyl group of type  $B_n$ , BeitrÄge zur Algebra und Geometrie 44, no. 2 (2003) 359-373.

[4] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., A Gelfand Model for the Weyl group of type  $D_n$  and the branching rules  $D_n \leftrightarrow B_n$ . Journal in Algebra, vol. 294, (2005), 97-116.

[5] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., A Gelfand Model for the Symmetric Generalized Group, Communications in Algebra, 37 (5), 1808-1830. 2009.

[6] Baddeley, R., Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups. Journal of London Mathematical Society no. 44, serie 2 (1991) 55-74.

[7] Kodiyalam, V. and Verma, D.N., A natural representation model for symmetric groups. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.

[8] Shripad, M. G., Oesterlé, J. On Gelfand Models for Finite Coxeter Groups. <http://arxiv.org/abs/0907.4605>

[9] Vinroot, C. R., Involution models of finite Coxeter groups, J. Group Theory 11 (2008), no. 3, 333-340

**Autores:** José Araujo - Mauro Natale  
**Lugar:** UNCPBA - Tandil  
**Expositor:** Mauro Natale

---

### Modelo de Gelfand para el grupo de Weyl $W(D_{2n})$

Un modelo de Gelfand para un grupo finito  $G$ , es una representación  $\rho$  ordinaria del grupo cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de  $G$ . Modelos de Gelfand para un grupo finito fueron presentados en distintos artículos listados en las referencias. Las construcciones presentadas que involucran grupos de Weyl o, más generalmente, a familias infinitas de grupos de reflexiones, presentan excepciones inevitables como por ejemplo los modelos por involuciones estudiados por Baddeley en [6]. En [9], Vinroot prueba que un grupo de Coxeter admite un modelo por involuciones si, y sólo si, sus factores irreducibles son de tipo  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_{2n+1}$ ,  $H_3$  o  $I_2(n)$ . Por otra parte, es posible extender a otros grupos de reflexiones la construcción de Kodiyalam y Verma dada en [8], pero la misma no resulta modelo de Gelfand en varios casos entre los que se incluye el de  $W(D_{2n})$ . La construcción dada en [1] por Adin, Postnikov y Roichman está asociada con la de Kodiyalam y Verma, para un grupo de tipo  $G(m, 1, n)$ . El modelo polinomial introducido en [2] funciona para grupos de reflexiones de tipo  $I_2(n)$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_{2n+1}$  y  $G(m, 1, n)$ , según los resultados en [3], [4] y [5]. Posteriormente, Shripad y Oesterlé en [8] establecen que  $N$  es un modelo de Gelfand si  $G$  no es de tipo  $D_{2n}$ ,  $E_7$  o  $E_8$ . Es decir, esta construcción incluiría más casos que los modelos por involuciones, pero sigue excluyendo a  $W(D_{2n})$ . El resultado: Se obtiene un operador invariante  $\Omega$  tal que

$$M = \{P \hat{a} N : \Omega(P) = 0\}$$

es un modelo de Gelfand para  $W(D_{2n})$ .

[1] Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y., A Gelfand model for Wreath Products, arXiv:math.RT/08022824 v1, 2008.

[2] Aguado, J. L. and Araujo, J. O., A Gelfand model for the symmetric group, Communications in Algebra, 29 (4), 1841 - 1851 (2001).

[3] Araujo, J. O., A Gelfand model for a Weyl group of type  $B_n$ , BeitrÄge zur Algebra und Geometrie 44, no. 2 (2003) 359-373.

[4] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., A Gelfand Model for the Weyl group of type  $D_n$  and the branching rules  $D_n \rightarrow B_n$ . Journal in Algebra, vol. 294, (2005), 97-116.

[5] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., A Gelfand Model for the Symmetric Generalized Group, Communications in Algebra, 37 (5), 1808-1830. 2009.

[6] Baddeley, R., Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups. Journal of London Mathematical Society no. 44, serie 2 (1991) 55-74.

[7] Kodiyalam, V. and Verma, D.N., A natural representation model for symmetric groups. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.

[8] Shripad, M. G., Oesterlé, J. On Gelfand Models for Finite Coxeter Groups. <http://arxiv.org/abs/0907.4605>

[9] Vinroot, C. R., Involution models of finite Coxeter groups, J. Group Theory 11 (2008), no. 3, 333-340.

---

### Conferencia Invitada

**Sonia Trepode**

**Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

#### Álgebras inclinadas de conglomerado con todos sus ciclos cíclicamente orientados

En esta charla estudiamos álgebras inclinadas de conglomerado tal que su quiver es cíclicamente orientado. En este caso damos una descripción explícita de las relaciones minimales del álgebra.

Para estas álgebras mostramos la existencia de cortes admisibles (ver [FP], [BFPPT]) y además que toda flecha en un ciclo mínimo está contenida en un corte admisible.

Por otra parte, mostramos que si el anillo de endomorfismos de un álgebra de dimensión global 2 sobre su categoría de conglomerado, en el sentido de Amiot [A], es inclinada de conglomerado y tiene todos sus ciclos cíclicamente orientados, entonces el álgebra original es un cociente por un corte admisible.

En el caso de álgebras inclinadas de conglomerado con quiver cíclicamente orientado de tipo Dynkin o Dynkin Extendido, la conexión es más fuerte y vale la recíproca. En este caso, el álgebra original es derivadamente equivalente al álgebra hereditaria. Estos resultados se encuentran en [BT].

Claire Amiot: Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential. arXiv:0805.1035

Michael Barot, Elsa Fernández, María Inés Platzeck, Nilda Isabel Pratti, Sonia Trepode: From iterated tilted algebras to cluster-tilted algebras. Advances in Mathematics Volume 223, (2010) no. 4, 1468-1494.

Barot, M. and Trepode, S. Cluster tilted algebras with cyclically oriented quiver. arXiv:1002.4842

Elsa Fernández, María Inés Platzeck: Isomorphic trivial extensions of finite dimensional algebras. J. Pure Appl. Algebra 204 (2006), no. 1, 9-20.

**Autores:** Natalia Bordino, Elsa Fernández y Sonia Trepode  
**Lugar:** Universidad Nacional de Mar del Plata  
**Expositor:** Natalia Bordino

---

### Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo $E_6$ tilde

En esta charla mostraremos cómo a partir de las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo  $E_6$  se pueden obtener las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo  $\tilde{E}_6$ .

En [BFT] se obtuvo la clasificación de las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo  $E_6$ . Definimos unas operaciones admisibles que nos permiten agrandar el quiver de estas álgebras. Las álgebras obtenidas por estos “agrandamientos” en sus quivers resultan ser álgebras inclinadas de conglomerado de tipo  $\mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H}$  es una categoría abeliana hereditaria.

Nuestro objetivo es decidir, cuáles de éstas son álgebras inclinadas de conglomerado de tipo  $\tilde{E}_6$ . De esta manera por medio de estos agrandamientos y a partir de [PT], obtenemos la clasificación de las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo  $\tilde{E}_6$ .

[BFT] Bordino, N., Fernández, E. and Trepode, S., *From cluster-tilted algebras of type  $E_p$  to type  $\tilde{E}_p$* . En preparación.

[PT] de la Peña, J. A. and Trepode, S. *Quasitilted one point extensions of tilted Algebras* Proceedings of ICRA IX. (Beijing 2000) Normal Beijing University Press. China (2002) 373-386.

---

**Autores:** Olga Funes, María Andrea Gatica, Francois Huard, Marcelo Lanzilotta  
**Lugar:** Universidad de la Patagonia San Juan Bosco-Universidad Nacional de la Pampa- Universidad Bishop-Universidad Nacional de La República  
**Expositor:** Olga Funes

---

### Una caracterización de las álgebras autoinyectivas via las funciones de Igusa-Todorov

Sea  $A$  un álgebra de Artin sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$ . En el año 2005, los matemáticos Kiyoshi Igusa y Gordaba Todorov ([IT]), definieron dos funciones  $\phi$  y  $\Psi$  que a cada  $A$ -módulo a izquierda finitamente generados le asocia un número en el conjunto de los números naturales (uno cada función). Estas funciones, que llamaremos las funciones de Igusa-Todorov,

generalizan el concepto de dimensión proyectiva. En esta comunicación luego de presentar estas funciones, veremos que:

**Teorema.** *Sea  $A$  una álgebra de Artin. Entonces*

*$A$  es un álgebra autoinyectiva si y sólo si  $\phi(A) = 0$  si y sólo si  $\Psi(A) = 0$*

[IT] Kiyoshi Igusa, Gordana Todorov, *On the finitistic global dimension conjecture for artin algebras*, Representation of algebras and related topics, 201-204. Field Inst. Commun., 45. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005)

---

**Autores:** Ibrahim Assem y M. Andrea Gatica

**Lugar:** Universidad de Sherbrooke - Universidad Nacional de La Pampa

**Expositor:** M. Andrea Gatica

---

El carcaj con relaciones de la extensión por relaciones de un álgebra de cuerdas

Dada un álgebra finito dimensional  $A$  de dimensión global menor o igual que dos, I. Assem, T. Brüstle y R. Schiffler definieron su extensión por relaciones como la extensión trivial  $A \rtimes Ext_A^2(DA, A)$  donde  $D = Hom_k(-, k)$  es la dualidad standard entre  $mod A$  y  $mod A^{op}$ .

El objetivo de esta comunicación es describir el carcaj con relaciones de la extensión por relaciones de un álgebra de cuerdas de dimensión global menor o igual que dos y mostrar algunas propiedades que son obtenidas usando esta descripción.

---

**Autores:** Alfredo González Chaio y Sonia Trepode

**Lugar:** Universidad Nacional de Mar del Plata

**Expositor:** Alfredo González Chaio

---

Dimensión de representación de un álgebra inclinada de conglomerado minimal de tipo infinito

En 1971, Auslander [A] introdujo el concepto de dimensión de representación de un álgebra de artin. La dimensión de representación es Morita-invariante y caracteriza las álgebras de tipo de representación finita. Por otro lado, [BMR], introdujeron las álgebras inclinadas de conglomerado, las cuales son por definición, aquellas de la forma  $End_{\mathcal{C}}(T)^{op}$  con  $T$  un objeto inclinante sobre una categoría de conglomerado  $\mathcal{C}$ . Un caso particular de estas

álgebras son las álgebras inclinadas de conglomerado minimales de tipo infinito. Un álgebra conexas de dimensión finita  $\Lambda$  es minimal de tipo infinito si y solo si es de tipo representación infinito y para cada vértice  $e$  en el carcaj de  $\Lambda$  tenemos que  $\Lambda/\Lambda e\Lambda$  es de tipo representación finito. En el caso de las álgebras inclinadas de conglomerado, este cociente nos da un álgebra inclinada de conglomerado. Nuestro objetivo en esta charla, es mostrar que la dimensión de representación de un álgebra inclinada de conglomerado minimal de tipo infinito es menor o igual que 3.

[ABS] I. Assem, T.Brüstle, R.Schiffler, Cluster-tilted algebras and slices, J. of Algebra 319 (2008) 3464-3479.

[APT] I. Assem, M. I. Platzeck, S. Trepode, On the representation dimension of tilted and cluster algebras, J. of Algebra 296 (2006) 426-439.

[A] M.Auslander, representation dimension of artin algebras, Queen Mary College Mathematics Notes, London, (1971).

[BMR] A.B.Buan, R.Marsh, I.Reiten. Cluster-tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 359(1) (2007) 323-332 (electronic).

[BMRT] A.B.Buan, R.Marsh, M.Reineke, I.Reiten, G.Todorov, Tilting theory and cluster combinatorics, Adv. Math. 204, no. 2, (2006) 572-618.

[BRS] A.B.Buan, I. Reiten, A. Seven, Tame concealed algebras and cluster quivers of minimal infinite type, J. of Pure and Applied algebra, Volume 211, Issue 1, (2007) 1-292.

[CP] F.U.Coelho, M.I.Platzeck, On the representation dimension of some classes of algebras, J. of Algebra 275 (2004) 615-628.

---

**Autores: Claudia Chaio, Isabel Pratti, María José Souto Salorio**

**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

**Expositor: Isabel Pratti**

---

#### El carcaj de Auslander-Reiten de $C_n(\text{proy}H)$

Sea  $A$  un álgebra de artin y  $\text{mod } A$  la categoría de  $A$ -módulos a derecha finitamente generados. La categoría  $C_n(\text{proy } A)$  es la subcategoría llena de  $C(\text{mod } A)$ , cuyos objetos son los complejos  $X = (X^i, d_x^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  en la categoría de  $A$ -módulos proyectivos finitamente generados con  $X^i = 0$  para  $i \notin \{1, \dots, n\}$ . Esta categoría fue introducida por R. Bautista en [B] para el caso  $n = 2$  y luego generalizada para  $n > 2$  en [BSZ]. Estas categorías son exactas, con suficientes proyectivos e inyectivos y de dimensión global finita. La importancia de ellas radica en que nos permiten obtener resultados en la categoría derivada de complejos acotados  $D^b(\text{mod } A)$ .

En este trabajo consideraremos la categoría  $C_n(\text{proy}H)$ , donde  $H$  es un álgebra hereditaria de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Estudiamos propiedades de ella, de sus morfismos irreducibles y de las sucesiones que casi se parten (conflaciones). Mostramos la forma de construir el carcaj de Auslander-Reiten de  $C_2(\text{proy}H)$ . A partir del carcaj de Auslander-Reiten de  $C_2(\text{proy}H)$  construiremos el de  $C_n(\text{proy}H)$  para  $n > 2$ .

[B] R, Bautista. *The category of morphisms between projectives modules*. Communications in Algebra 32 (11), (2004), 4303-4331.

[BSZ] R, Bautista, M.J. Souto Salorio, R. Zuaz u. *Almost split sequences for complexes of fixed size*. J. Algebra 287, (2005), 140-168.

---

**Autores: O. Mendoza, M. I. Platzeck y M. Verdecchia**

**Lugar: UNS, Bahía Blanca**

**Expositor: M. Verdecchia**

---

#### Sistemas estratificantes propios

Sea  $\Lambda$  un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $K$  y  $S_1, S_2, \dots, S_n$  una lista completa de  $\Lambda$  - módulos simples no isomorfos. Fijado este ordenamiento de los simples definimos para cada  $i$  el módulo estándar  $\Delta_i$  como el mayor cociente de la cápsula proyectiva  $P_i$  de  $S_i$  con factores de composición sólo en  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ . Notamos por  $\mathcal{F}(\Delta)$  a la subcategoría de  $\text{mod}\Lambda$  cuyos objetos son los módulos  $M$  que tienen una  $\Delta$  - filtración, esto es, una filtración con los  $\Delta_i$  como factores de composición. Esta subcategoría de  $\text{mod}\Lambda$  juega un papel muy importante en el estudio de las álgebras estándarmente estratificadas, que son aquellas con sus proyectivos en  $\mathcal{F}(\Delta)$ . Dlab y Ringel [DR] definieron, en su estudio de estas álgebras, los llamados módulos propios estándar, como ciertos módulos cociente de los módulos estándar. Erdmann y Sáenz [ES] introdujeron el concepto de sistema estratificante, generalizando los módulos estándar. En nuestro trabajo definimos y estudiamos la noción de sistema estratificante propio, una generalización de los módulos propios estándar.

V. Dlab y C. M. Ringel. *The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras*, in "Representations of Algebras and Related Topics", (H. Tachikawa and S. Brenner, Eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 168, pp.200-224. (1992).

K. Erdmann y C. Sáenz. *On standardly algebras*, Comm. in Algebra, Vol. 31, No. 7, pp. 3429-3446. (2003).

**Autores:** Antonio Cafure, Eda Cesaratto, Guillermo Matera, Mariana Pérez  
**Lugar:** Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento

**Expositor:** Mariana Pérez

---

Análisis probabilístico de un algoritmo de búsqueda de ceros  $q$ -racionales de un polinomio multivariado

En esta comunicación consideramos el problema de analizar algoritmos para la búsqueda de ceros  $q$ -racionales de polinomios multivariados definidos sobre el cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$  de  $q$  elementos. Entre la variedad de algoritmos que se han propuesto para tal fin analizaremos, desde un punto de vista probabilístico, un algoritmo basado en la “búsqueda en bandas verticales” que llamaremos BBV. La estrategia de búsqueda en bandas verticales fue introducida en [3] para el caso de curvas planas. En [1] y [2], se generalizó esta idea para calcular un cero  $q$ -racional de un sistema polinomial de acuerdo a los patrones de irreducibilidad de la variedad asociada al sistema.

Sea  $a_1, \dots, a_k$  con  $k = q^{r-1}$  una enumeración de los elementos de  $\mathbb{F}_q^{r-1}$ . El algoritmo BBV tiene como entradas los polinomios  $F \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_r]$ , evalúa al polinomio  $F$  sucesivamente en dichos puntos  $a_i$  y busca ceros  $q$ -racionales del polinomio univariado  $F(a_i, X_r)$ . El algoritmo termina en cuanto encuentra un cero en  $\mathbb{F}_q$  de alguno de estos polinomios univariados. En una primera aproximación al análisis de BBV se define como costo la cantidad  $C$  de evaluaciones que este algoritmo necesita para encontrar un cero de  $F$ .

Para realizar el análisis probabilístico de BBV consideramos la probabilidad uniforme  $\mathbb{P}_{q,r,d}$  sobre el conjunto de todos los polinomios  $F_{q,r,d}$  en  $r$  variables de grado menor o igual que  $d$  y con coeficientes en  $\mathbb{F}_q$ . El objetivo es determinar la distribución de la variable aleatoria  $C$  anteriormente definida.

Hemos demostrado que, para un elemento  $a \in \mathbb{F}_q^{r-1}$ , la probabilidad de que  $F(a, X_r)$  posea raíces racionales coincide con la de que un polinomio univariado aleatorio en  $\mathbb{F}_q$  las posea. Con este resultado y sin requerir hipótesis de irreducibilidad, demostramos que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{r,d}[C = 1] = 1 - e^{-1}$$

donde  $e$  es la base de logaritmo natural. Este resultado indica que, con alta probabilidad, el algoritmo encuentra un cero  $q$ -racional del polinomio en consideración en una sola evaluación. Para completar el análisis probabilístico, daremos estimaciones de la probabilidad del evento  $[C = i]$  para  $1 \leq i \leq q^{r-1}$ .

A. Cafure and G. Matera. Improved explicit estimates on the number of solutions of equations over a finite field. *Finite Fields Appl*, 12(2), 2006, 155-185.

G. Matera. The computation of rational solutions of polynomial systems over a finite field, *Actas de las VII Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica*, CIEM, Castro Urdiales, España, 2010, pp. 9-33.

J. von zur Gathen, I. Shparlinski, and A. Sinclair. Finding points on curves over finite fields. *SIAM J. Comput.*, 32(6), 2003, 1436-1448.

---

**Autores: Javier Trenti, Antonio SÁNGARI, Fernando Albarado**

**Lugar: Universidad Nacional de Salta**

**Expositor: Javier Trenti**

---

### Estructuras de datos para la obtención de bases de Gröbner

En el desarrollo de algoritmos para la obtención de bases de Gröbner se requiere contar con una estructura apropiada para la representación de polinomios multivariados. Esta estructura debe facilitar el desarrollo de algoritmos intermedios con diversos propósitos: decidir si un monomio mónico es divisor de otro, encontrar un mínimo común múltiplo entre dos monomios mónicos, obtener el coeficiente de un monomio mónico dado, separar términos de polinomios, descomponer polinomios, entre otros. Además, en el proceso de búsqueda de bases de Gröbner encontramos algunos algoritmos específicos que requieren hallar reducciones módulo polinomios, haciendo necesario para ello poder realizar operaciones entre polinomios que deben ejecutarse de manera óptima, tanto desde el punto de vista algorítmico (en cuanto a su simpleza y elegancia) como desde el costo computacional que implican. Nuestro enfoque trabaja con estructuras de tipo árboles sintácticos, que permiten no sólo la buena representación de los objetos matemáticos involucrados en el proceso, sino además la realización de simplificaciones a fin de obtener la misma estructura para expresiones equivalentes dentro de un cuerpo de coeficientes dado. La estructura permite ordenamientos admisibles en productos de potencia: léxico y por grado total, permitiendo además la definición de ordenamientos especiales que deben verificar las condiciones necesarias para ser admisibles. La implementación se realiza bajo el paradigma de orientación a objetos, utilizando un lenguaje de distribución libre y accesible en cualquier ámbito como lo es Java. Se definen clases contenedoras de las estructuras de datos para la representación de expresiones matemáticas, como así también clases especiales para la utilización de enteros grandes. A pesar de que la librería distribuida con las máquinas virtuales de Java ya poseen

este tipo de clases definidas, hemos tomado la decisión de desarrollarlas desde el principio debido a la necesidad de transmitir técnicas de trabajo en las materias que se dictan en nuestra Universidad. Los cuerpos podrán definirse mediante clases apropiadas que verifiquen que la generación de instancias cumpla las condiciones para las cuales ha de ser utilizada.

---

**Autores:** Selene Sanchez Flores  
**Lugar:** Universidad de Colonia  
**Expositor:** Selene Sanchez Flores

---

La estructura de álgebra de Lie graduada de la cohomología de Hochschild de un álgebra de grupo modular

El espacio de las derivaciones exteriores de un álgebra es el cociente del espacio de las derivaciones módulo las derivaciones interiores. El corchete conmutador proporciona a este espacio una estructura de álgebra de Lie. Por otro lado, se sabe que este espacio es la cohomología de Hochschild en grado uno.

En 1963, Gerstenhaber define un corchete en los grupos de cohomología de Hochschild para grados superiores. Este corchete restringido en grado uno es el corchete conmutador. Además, el corchete de Gerstenhaber proporciona una estructura de álgebra de Lie graduada.

En mi plática, dare resultados sobre esta estructura en el caso del álgebra de grupo sobre un campo de característica positiva y donde el grupo es abeliano.

---

**Autores:** N. Andruskiewitsch, F. Fantino, G. A. García, L. Vendramín  
**Lugar:** FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba  
**Expositor:** G. A. García

---

Sobre racks simples y álgebras de Hopf punteadas

El método más eficiente para clasificar álgebras de Hopf punteadas, conocido como el *método del levante*, fue introducido por Andruskiewitsch y Schneider en [AS]. Este método consiste en determinar todas las álgebras de Hopf  $A$  tales que el álgebra de Hopf graduada  $gr(A)$  es isomorfa a un producto de Majid-Radford  $\mathfrak{B}(V)\#_k\Gamma$ , donde  $\mathfrak{B}(V)$  es un álgebra de Nichols de dimensión

finita y  $\Gamma$  es un grupo finito. Uno de los pasos fundamentales de este método es determinar todos los espacios vectoriales trenzados  $V$  de tipo grupo tales que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(V)$  es de dimensión finita.

Debido a los pocos resultados conocidos sobre grupos no abelianos, resulta natural comenzar a estudiar el problema cuando  $\Gamma$  es simple no abeliano. Una observación importante es que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(V)$  de un espacio vectorial trenzado  $(V, c)$  está completamente determinada como álgebra y coálgebra por la trenza  $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ . Si  $(V, c)$  es irreducible, esto se limita a un problema de las clases de conjugación de  $\Gamma$ . Una de las herramientas que parece más adecuada para resolver el problema es la teoría de *racks*. En esta charla mostraremos los resultados obtenidos recientemente en [AFGaV] y en [AFGaV2] sobre el estudio de racks simples. Específicamente, mostraremos cuándo ciertos racks homogéneos simples torcidos y ciertos racks asociados a clases de conjugación de grupos finitos de tipo Lie cumplen la propiedad de ser de *tipo D*, que asegura que el álgebra de Nichols asociada al rack sea de dimensión infinita.

N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. Math. 171 (2010), 375–417.

N. Andruskiewitsch, F. Fantino, G. A. García and L. Vendramin, *On twisted homogeneous racks of type D*, enviado.

N. Andruskiewitsch, F. Fantino, G. A. García and L. Vendramin, *On Nichols algebras associated to simple racks*, enviado. Preprint: ver arXiv.

---

**Autores: García Iglesias - Mombelli**

**Lugar: FaMAF - Córdoba**

**Expositor: García Iglesias**

---

### Representaciones de la categoría de módulos de álgebras de Hopf punteadas sobre $S_3$ y $S_4$

Denotaremos por  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Dada una categoría tensorial  $C$ , una *categoría módulo exacta* [EO] sobre  $C$  es una categoría abeliana  $M$  equipada de un funtor bi-exacto  $\otimes : C \times M \rightarrow M$  sujeto a ciertos axiomas de asociatividad y unidad, tal que para cada objeto proyectivo  $P \in C$  y cualquier  $M \in M$  el objeto  $P \otimes M$  es nuevamente proyectivo.

Recordaremos los resultados básicos sobre categorías módulo sobre álgebras de Hopf de dimensión finita [AM]. Recordaremos el principal resultado de [M] que da un isomorfismo entre comódulo álgebras Loewy-graduadas y un producto semidirecto de un álgebra de grupo torcida y una subálgebra coideal homogénea dentro del álgebra de Nichols. También recordaremos la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita con coradical  $kS_3$  or  $kS_4$  de [AHS], [GG], respectivamente.

Usando estos resultados, mostraremos que si  $n = 3, 4, 5$  y  $H$  es un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre  $kS_n$ , entonces para cada exacta indescomponible módulo categoría  $M$  sobre  $Rep(grH)$  existen

- un subgrupo  $F < S_n$  y un 2-cociclo  $\psi \in Z^2(F, k^\times)$ ,
- un subconjunto  $Y \subseteq X$  invariante por la acción de  $F$ ,
- una familia de escalares  $\{\xi_C\}$  compatible con  $(F, \psi, Y)$ ,

tales que  $M \simeq_{A(Y, F, \psi, \xi)} M$ , donde  $A(Y, F, \psi, \xi)$  es una  $grH$ -comódulo álgebra construida con datos  $(Y, F, \psi, \xi)$ . También mostraremos una clasificación de subálgebras homogéneas coideales a izquierda conexas  $A(Y, F, \psi, \xi)$  de  $grH$  junto con una presentación por generadores y relaciones.

Finalmente probamos que si  $H$  es un álgebra de Hopf de dimensión finita con coradical  $kS_3$  or  $kS_4$  entonces  $H$  es una deformación por cociclo de  $grH$ , un resultado análogo a un teorema de Masuoka para grupos abelianos. Esto implica que hay una correspondencia biyectiva entre categorías módulo sobre  $Rep(H)$  y  $Rep(grH)$ .

- [AHS ] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger and H.J. Schneider, *The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module*, arXiv:0803.2430.
- [AM ] N. Andruskiewitsch and M. Mombelli, *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **314** (2007), 383–418.
- [EO ] P. Etingof and V. Ostrik, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 3, 627–654.
- [GG ] G. A. García and A. García Iglesias, *Pointed Hopf algebras over  $S_4$* , accepted in Israel Journal of Mathematics, preprint arXiv:0904.2558.
- [M ] M. Mombelli, *Representations of tensor categories coming from quantum linear spaces*, preprint arxiv:0907.4517.

**Autores:** Andrea Solotar, Mariano Suarez-Álvarez, Quimey Vivas  
**Lugar:** Departamento de Matemática - FCEN - UBA  
**Expositor:** Quimey Vivas

---

### Cohomología de Hochschild de Álgebras de Weyl Generalizadas

En este trabajo calculamos la (co)homología de Hochschild de las álgebras de Weyl generalizadas en el caso *cuántico*.

En [FSS], Marco Farinati, Andrea Solotar y Mariano Suárez-Álvarez determinaron completamente los grupos de cohomología de Hochschild de las álgebras de Weyl generalizadas  $A(k[h], \sigma, a)$ , introducidas por V. Bavula en [Bav], de *tipo clásico* (esto es, en las que el automorfismo  $\sigma : k[h] \rightarrow k[h]$  que determina el álgebra es tal que  $\sigma(h) = h - 1$  y de ciertas de sus álgebras de invariantes. Esta familia de álgebras incluye, entre otras, al álgebra de Weyl  $A_1$  usual, a los cocientes primitivos del álgebra envolvente  $\mathfrak{U}(sl(2))$  y a ciertas álgebras de operadores diferenciales.

El caso *cuántico* corresponde a las álgebras de Weyl generalizadas de la forma  $A(k[h], \sigma, a)$  construidas a partir del automorfismo  $\sigma : k[h] \rightarrow k[h]$  tal que  $\sigma(h) = qh$  para un escalar no nulo  $q$ . Este caso, que presenta dificultades considerablemente mayores que las del trabajo llevado a cabo en [FSS] - especialmente en el caso en que el parámetro  $q$  es una raíz de la unidad - completa la determinación de la cohomología de todas las álgebras de Weyl generalizadas contruidas a partir del álgebra  $k[h]$ .

Bavula, V. V. Generalized Weyl algebras and their representations, *Algebra i Analiz* 4 (1992), no. 1, 75-97; English transl., *St. Petersburg Math. J.* 4 (1993), no. 1, 71-92.

Bavula, V. V.; Jordan, D. A. Isomorphism problems and groups of automorphisms for generalized Weyl algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), no. 2, 769-794.

Farinati, M. A.; Solotar, A.; Suárez-Álvarez, M. Hochschild homology and cohomology of generalized Weyl algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 53 (2003), no. 2, 465-488.

Richard, L.; Solotar, A. Isomorphisms between quantum generalized Weyl algebras. *J. Algebra Appl.* 5 (2006), no. 3, 271-285.

Weibel, Ch. An introduction to homological algebra. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

**Autores:** Martín Szlyd  
**Lugar:** Universidad de Buenos Aires  
**Expositor:** Martín Szlyd

---

### Un enfoque Tannakiano a la teoría de Galois de Grothendieck

En el SGA I Grothendieck desarrolla una teoría que tiene como caso particular la correspondencia de Artin-Galois entre extensiones finitas de  $\mathbb{Q}$  y subgrupos abiertos (= acciones transitivas continuas) del grupo de Galois profinito  $G(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ .

En la teoría de Grothendieck [1], se trabaja con una categoría  $\mathcal{C}$  munida de un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns_{<\infty}$  a valores en la categoría de conjuntos finitos, y se construye un grupo profinito  $\pi = Aut(F)$  cuyos elementos son los automorfismos de  $F$ . Luego se demuestra una equivalencia de categorías  $\tilde{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns_{<\infty}^\pi$  entre  $\mathcal{C}$  y la categoría de acciones continuas del grupo  $\pi$ .

En la teoría de Tannaka según Joyal [2], se trabaja con un funtor tensorial  $F : \mathcal{C} \rightarrow Vec_{\mathbb{C}}^{<\infty}$  tomando valores en  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Se construye un álgebra de Hopf  $End^V(F)$  (= grupo algebraico), y se da una equivalencia de categorías  $\tilde{F} : \mathcal{C} \rightarrow Comod_{<\infty}(End^V(F))$  entre  $\mathcal{C}$  y la categoría de comódulos de dimensión finita de la coálgebra  $End^V(F)$  (= representaciones finitas del grupo algebraico).

Como ha sido observado por varios autores y demostrado explícitamente en nuestro trabajo [3], los desarrollos de Joyal-Tannaka pueden realizarse en una categoría tensorial abstracta en lugar de la categoría  $Vec_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ . Esto da lugar a la posibilidad de encarar otros problemas con un enfoque Tannakiano, es decir utilizando las mismas construcciones y técnicas. En particular se propone contar cómo se puede estudiar de esta forma la teoría de Galois de Grothendieck descrita en el segundo párrafo. Consideramos para esto el funtor  $T : \mathcal{C} \rightarrow Sup$  que se obtiene componiendo a  $F$  con el funtor  $Sup$ -reticulado libre, tomando valores en la categoría tensorial de los  $sup$ -reticulados. Se obtiene así el álgebra de Hopf  $End^V(T)$  (= grupo localico en este contexto). Además, el dato de un comódulo finitamente generado corresponde al dato de una acción continua finita del grupo localico, y en este caso el dual de  $End^V(T)$  resulta isomorfo al grupo profinito de automorfismos de  $F$ .

Demostramos así que los teoremas de representación de Tannaka y de Grothendieck son el mismo teorema, en las categorías tensoriales de los espacios vectoriales y de los  $sup$ -reticulados respectivamente. Resta desarrollar una demostración unificada de los mismos.

[1] A. Grothendieck, *SGA I (1960-1961)*, Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 224, 1971.

[2] A. Joyal and R. Street, *An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups*, Category Theory, Springer, 1990.

[3] Online en [cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/Szyld\\_Martin.pdf](http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/Szyld_Martin.pdf).

---

**Autores: Alain Bruguières (1) y Sonia Natale (2)**

**Lugar: (1) Département de Mathématiques, Université Montpellier II, (2) Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba**

**Expositor: Sonia Natale**

---

### Sucesiones exactas de categorías tensoriales

En este trabajo introducimos las nociones de funtor normal y de sucesión exacta de categorías tensoriales. Demostramos que las sucesiones exactas de categorías tensoriales, definidas de esta forma, generalizan las sucesiones (estrictamente) exactas de álgebras de Hopf, en el sentido de la definición dada por H.-J. Schneider en [Sc] y, en particular, las sucesiones exactas de grupos finitos.

En el caso en que  $\mathcal{C}'$  es una categoría tensorial finita, damos una clasificación de sucesiones exactas de categorías tensoriales  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$  en términos de múnadas de Hopf fieles sobre  $\mathcal{C}''$  y también en términos de álgebras conmutativas trivializantes en el centro de  $\mathcal{C}$ . Más generalmente, demostramos que dado un funtor tensorial dominante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  que admite un adjunto (a izquierda o a derecha) exacto, entonces existe un álgebra conmutativa canónica  $(A, \sigma)$  en el centro  $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$  tal que  $F$  es tensorialmente equivalente al funtor libre:  $\mathcal{C} \rightarrow \text{mod}_{\mathcal{C}}(A, \sigma)$ , donde  $\text{mod}_{\mathcal{C}}(A, \sigma)$  denota la categoría de  $A$ -módulos en  $\mathcal{C}$  munida de la estructura de categoría monoidal inducida por la trenza  $\sigma$ .

Estos resultados nos permiten dar una re-interpretación de la noción de equivariantización de una categoría tensorial bajo la acción de un grupo finito y, en particular, de la construcción de modularización, según se introdujera en [B], en términos de sucesiones exactas, múnadas de Hopf y álgebras centrales conmutativas.

Como aplicación demostramos que una categoría de fusión trenzada cuya dimensión es libre de cuadrados e impar es equivalente, como categoría de fusión, a la categoría de representaciones de un grupo.

[B] A. Bruguières, *Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3*, Math. Ann. **316** (2000), 215–236.

[BN] A. Bruguières y S. Natale, Exact sequences of tensor categories, preprint  
arXiv:1006.0569v1 [math.QA]

[Sc] H.-J. Schneider, *Some remarks on exact sequences of quantum groups*, Comm. Alg.  
21 (1993), 3337-3357.



# Análisis Funcional y Complejo

*Organizan:*

*Silvia Lassalle y Pedro Massey*



**Autores: Jorge Antezana y Diana Pastrian**

**Lugar: U.N. de La Plata - U.N. de la Patagonia S.J.B.**

**Expositor: Diana Pastrian**

---

### Ángulos principales, mayorización y métricas angulares

Desde que C. Jordan introdujera, a fines del siglo XIX, los ángulos principales entre dos subespacios  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  de  $\mathbb{C}^n$ , dicha noción ha sido redescubierta y ampliamente estudiada por diversos autores en distintos contextos.

Recientemente, Knyazev y su grupo de investigación han estudiado los ángulos principales usando técnicas de mayorización a fin de obtener desigualdades, las cuales son útiles en el estudio de estimaciones a priori del error cometido al calcular los autovalores de una matriz hermitiana con el método de Rayleigh-Ritz (ver [3] y las citas que allí aparecen). Asimismo, el uso de las técnicas de mayorización en el estudio de los ángulos principales ha permitido introducir nuevas métricas unitariamente invariantes en la denominada variedad de Grassmann (ver [4]). Esto era particularmente necesario en problemas de control, donde las métricas existentes no eran del todo satisfactorias.

En la presente comunicación, tras recordar las nociones de ángulos principales y mayorización, se exhibirán algunos ejemplos del tipo de desigualdades que se estudian, y se mostrará que, en ciertos casos, las métricas unitariamente invariantes antes mencionadas coinciden (salvo un múltiplo escalar), con las métricas que induce una estructura de Finsler definida adecuadamente en la Grassmanniana.

R.Abraham, J.Marsden, T.Ratiu, *Manifolds, tensor analysis and applications*, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 75. Springer-Verlag, 1988.

H.Porta, L.Recht, *Minimality of geodesics in Grassmann manifolds*, Proc.Amer.Math.Soc.100 (1987), 464-466.

A.V.Knyazev and M.E.Argentati, *Principal angles between subspaces in an A-based scalar product: Algorithms and perturbation estimates*. SIAM Journal on Scientific Computing, 23(6):2009-2041, 2002.

L.Qiu, Y.Zhang and C.K.Li, *Unitarily invariant metrics on the Grassmann space*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 27(2):507-531, 2005.

**Autores:** Nancy Kruse, Pedro Massey, Irene Mosconi  
**Lugar:** UNPSJB-UNLP-UNCOMA  
**Expositor:** Nancy Kruse

---

### Funciones cóncavas y matrices expansivas

Sea  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  el conjunto de matrices de  $n \times n$  sobre  $\mathbb{C}$ . Una matriz  $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  se dice que es expansiva si  $Z^*Z \geq I$ . Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A = A^*$  entonces  $\lambda_j(A)$ ,  $j = 1, \dots, n$  denotan los autovalores de  $A$  ordenados en forma decreciente. Una norma  $\|\cdot\|$  sobre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  se dice unitariamente invariante o simétrica (NUI) si  $\|VAU\| = \|A\|$  para toda  $A$  y para toda  $U, V$  unitarias en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En [1, 2] Bourin prueba que para  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función cóncava,  $A, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A \geq 0$  y  $Z$  expansiva vale la desigualdad

$$\|g(Z^*AZ)\| \leq \|Z^*g(A)Z\|$$

para toda norma simétrica  $\|\cdot\|$ . Sin embargo la desigualdad más fuerte

$$(1) \quad \lambda_j(g(Z^*AZ)) \leq \lambda_j(Z^*g(A)Z), \quad j = 1, \dots, n$$

no es cierta en general.

En esta charla damos una caracterización de las funciones cóncavas  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  para las cuales valen las desigualdades (1) con  $Z$  una matriz expansiva ( $Z^*Z \geq I$ ).

También mostraremos que dadas  $A, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tales que  $X$  e  $Y$  son expansivas y  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función cóncava (creciente) entonces

$$(2) \quad \|g(|X^*AY|)\| \leq \|X^*g(|A^*|), X \oplus Y^*g(|A|)Y)\|$$

para toda norma unitariamente invariante  $\|\cdot\|$ . Esta desigualdad complementa algunos de los resultados obtenidos en [1].

J.C. Bourin, *Convexity or concavity inequalities for Hermitian operators*

J.C. Bourin, *A concavity inequality for symmetric norms*, LAA 2006.

J.C. Bourin, O. Hirzallah, F. Kittaneh, *Jensen matrix inequalities and direct sums*.

Conferencia Invitada  
Francisco Martínez Pería  
Instituto Argentino de Matemática “Alberto P. Calderón”

---

### Splines abstractos en espacios de Krein

Desde que I. J. Schoenberg [1] introdujo los splines como solución a diversos problemas de interpolación, éstos han sido utilizados en distintas áreas de la matemática, como la teoría de aproximaciones, la estadística, el análisis numérico y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Además, se han convertido en una importante herramienta en el procesamiento de imágenes y señales, la teoría del aprendizaje computacional y otras aplicaciones.

En la década del '60, M. Atteia [2] introdujo una versión abstracta del problema de interpolación, formulada en espacios de Hilbert. La misma fue posteriormente desarrollada por P. J. Laurent, A. Sard, C. de Boor y otros.

Recientemente, S. Canu et al. [3] introdujeron en la teoría del aprendizaje ciertos métodos que involucran núcleos (reproductivos) indefinidos. El mismo puede describirse como un problema de interpolación entre espacios de Krein con núcleo reproductivo, es decir, espacios con núcleo reproductivo donde el núcleo es simétrico, pero que no cumple necesariamente la condición de Mercer.

En esta charla, motivados principalmente por el enfoque de Atteia, presentaremos generalizaciones de los problemas abstractos de interpolación y smoothing a espacios de Krein. Más precisamente, si  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{K}$  son dos espacios de Krein y  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, dados dos operadores suryectivos  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  y  $V \in L(\mathcal{H}, \mathcal{E})$  nos proponemos describir los siguientes problemas:

- **Interpolación.** Fijado  $z_0 \in \mathcal{E}$ , encontrar  $x_0 \in \mathcal{H}$  tal que

$$[Tx_0, Tx_0]_{\mathcal{K}} = \min\{[Tx, Tx]_{\mathcal{K}} : V(x) = z_0\},$$

- **Smoothing.** Dado  $\rho > 0$  y fijado  $z_0 \in \mathcal{E}$ , encontrar  $x_0 \in \mathcal{H}$  tal que

$$[Tx_0, Tx_0]_{\mathcal{K}} + \rho \|Vx_0 - z_0\|_{\mathcal{E}}^2 = \min_{x \in \mathcal{H}} ([Tx, Tx]_{\mathcal{K}} + \rho \|Vx - z_0\|_{\mathcal{E}}^2),$$

y llamaremos *splines abstractos indefinidos* a las soluciones de los mismos. Mostraremos además que esta definición puede interpretarse como una generalización a la propuesta en [3] para espacios de Krein con núcleo reproductivo.

I. J. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Parts A, B, Quart. J. Maths. 4 (1946), 45–99, 112–141.

M. Atteia, Généralization de la définition et des propriétés des “splines fonctions”, C.R. Sc. Paris 260 (1965), 3550–3553.

S. Canu, C. S. Ong, X. Mary, Splines with non positive kernels, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, (2005), 1–10.

---

**Autores:** M. Argerami\* y P. Massey\*\*

**Lugar:** U of Regina, Canada\* y U.N.L.P. Argentina\*\*

**Expositor:** P. Massey

---

### Teorema de Schur-Horn en factores semifinitos

Recordemos que dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  decimos que  $x$  está mayorizado por  $y$ , notado  $x \prec y$ , si  $\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow$  para  $1 \leq k \leq n-1$  y  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ , donde  $x^\downarrow \in \mathbb{R}^n$  es el vector que se obtiene de reordenar las entradas de  $x$  en forma decreciente.

Sea  $\mathcal{C}_D(X) \in \mathbb{R}^n$  la diagonal principal de  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  y sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  matriz positiva. Entonces el teorema de Schur-Horn establece la identidad

$$\{\mathcal{C}_D(U^*AU) : U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), U^*U = I\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \prec \lambda(A)\}$$

donde  $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n$  denota el vector de autovalores de  $A$  contando sus multiplicidades. Este resultado del análisis matricial es una de las caracterizaciones más útiles de la relación de mayorización.

El teorema de Schur-Horn se ha extendido al contexto de factores infinitos discretos y factores finitos continuos en [1] (caso  $I_\infty$ ) y en [2, 3] (caso  $II_1$ ) en el siguiente sentido: sea  $\mathcal{A}$  una subálgebra abeliana maximal (masa) de un factor  $\mathcal{M}$  de tipo  $I_\infty$  ó tipo  $II_1$  ( $\mathcal{A}$  discreta en el caso  $I_\infty$ ) y sea  $\mathcal{E}_\mathcal{A}$  la esperanza condicional que preserva la traza sobre  $\mathcal{A}$ . Si  $b \in \mathcal{M}$  es operador positivo entonces

$$\overline{\{\mathcal{E}_\mathcal{A}(u^*bu) : u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})\}}^\mathcal{T} = \{a \in \mathcal{A}^+ : a \prec b\} \quad (*)$$

donde  $\mathcal{T}$  es la llamada topología de la medida en  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{U}(\mathcal{M})$  es el grupo unitario de  $\mathcal{M}$ , y la relación  $a \prec b$  es una extensión natural de la mayorización al contexto de operadores en estos factores.

En esta charla se mencionarán algunas herramientas que permiten extender la noción de mayorización y considerar un teorema de tipo Schur-Horn en el caso de los factores de tipo continuo semi-finito (infinitos) llamados factores de tipo  $II_\infty$ . La expresión de este resultado es formalmente análoga a las extensiones (\*) previamente mencionadas.

Neumann, A. *An infinite-dimensional version of the Schur-Horn convexity theorem*. J. Funct. Anal. 161 (1999), no. 2, 418-451.

Argerami, M.; Massey, P. *A Schur-Horn theorem in  $II_1$  factors*. Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 5, 2051-2059.

Argerami, M.; Massey, P. *A contractive version of a Schur-Horn theorem in  $II_1$  factors*. J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), no. 1, 231-238.

---

**Autores:** Eduardo Chiumiento, María Eugenia Di Iorio

**Lugar:** Instituto Argentino de Matemática

**Expositor:** Eduardo Chiumiento

---

### Órbitas unitarias de operadores de compresión

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Denotemos por  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  al grupo de operadores unitarios en  $\mathcal{H}$ . Dado un ideal de Banach  $\mathfrak{J}$ , consideramos los grupos de Lie-Banach clásicos

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{J}} = \{ u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : u - 1 \in \mathfrak{J} \}.$$

Por otro lado, si  $\{ p_i \}_{i \geq 1}$  es un sistema ortogonal de proyecciones, es decir,  $p_i p_j = \delta_{ij}$ , definimos el *operador de compresión* asociado al sistema por

$$P : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}, \quad P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x p_i,$$

donde la convergencia de la serie resulta en la norma usual de operadores. Estos operadores de compresión aparecen naturalmente en el análisis matricial [2] y la teoría de ideales de Banach [3]. Además, resultan de interés para la física, puesto que son ejemplos de funciones de reducción cuántica [4].

Podemos considerar dos órbitas unitarias de un operador de compresión. Para  $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{J}}$ , sea  $L_u : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}$ ,  $L_u(x) = ux$ , y la órbita

$$\{ L_u P L_u^* : u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{J}} \}.$$

Para  $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{J}}$ , sea  $Ad_u : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}$ ,  $Ad_u(x) = uxu^*$ , y la órbita

$$\{ Ad_u P Ad_u^* : u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{J}} \}.$$

Estas órbitas son espacios homogéneos del grupo  $\mathcal{U}_{\mathfrak{J}}$ . En general, resulta interesante saber si un espacio homogéneo incluído en cierto espacio de Banach resulta una subvariedad. Este problema ha sido estudiado en diversos ejemplos de espacios homogéneos tales como órbitas unitarias de esperanzas condicionales, estados, proyecciones y autoadjuntos (ver [3, Capítulo IV]). Observemos que las órbitas de operadores de compresión están contenidas

en el álgebra  $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ , que consiste en operadores acotados sobre  $\mathcal{J}$ . En esta comunicación analizaremos en qué casos resultan subvariedades de  $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ .

D. Beltaïă, Smooth homogeneous structures in operator theory, Chapman and Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 137, 2006.

R. Bhatia, Pinching, trimming, truncating, and averaging of matrices, Amer. Math. Monthly 107 (2000), 602â608.

I. C. Gohberg, M. G. Krein, Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1960.

A. Odziejewicz, T. Ratiu, Banach Lie-Poisson spaces and reduction, Commun. Math. Phys. 243 (2003), no. 1, 1-54.

---

### Conferencia Invitada

Mariano Ruiz

Univ. Nac. de La Plata - Inst. Arg. de Matemática "Alberto P. Calderón"

---

### Dualidad en sistemas de reconstrucción

En este trabajo se considera la noción de Sistemas de Reconstrucción (finitos) en  $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^d$ . Esto es, dado  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ , una familia  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$ , con  $V_i \in L(\mathcal{H}, \mathbb{C}^{k_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , es un *Sistema de Reconstrucción* si el operador positivo

$$S_{\mathcal{V}} := \sum_{i=1}^m V_i^* V_i$$

es invertible en  $\mathcal{H}$ . Además, el sistema  $\mathcal{V}$  es *proyectivo* si se tiene  $V_i V_i^* = v_i^2 I_{k_i}$ , donde  $I_{k_i}$  es la identidad en  $\mathbb{C}^{k_i}$  y  $\{v_i^2\}_i$  son los *pesos* de  $\mathcal{V}$ .

En el contexto de los SR pueden definirse de forma adecuada los sistemas de reconstrucción duales de  $\mathcal{V}$ , esto es, sistemas de reconstrucción  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$x \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^m W_i^*(V_i x) \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^m V_i^*(W_i x), \quad x \in \mathcal{H}.$$

En esta charla se presentarán resultados relativos al estudio de sistemas duales óptimos para pérdidas de coeficientes (vectoriales) en el análisis Eq. (1) efectuado con  $\mathcal{V}$ . Además, introduciremos el potencial conjunto, definido en pares  $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ , donde  $\mathcal{V}$  es un SR proyectivo y  $\mathcal{W}$  es un SR dual de  $\mathcal{V}$ :

$$\text{RSP}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \text{RSP}(\mathcal{V}) + \text{RSP}(\mathcal{W}) = \text{tr} S_{\mathcal{V}}^2 + \text{tr} S_{\mathcal{W}}^2.$$

Se dará una caracterización espectral del conjunto de sistemas duales a un RS fijo y se describirá (de forma espectral y geométrica) a los pares  $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  que minimizan el potencial conjunto entre los sistemas de reconstrucción con pesos fijos de su parte proyectiva.

- [1] P. Massey, M. Ruiz y D. Stojanoff *Robust dual reconstruction systems and fusion frames* preprint.
- [2] P. Massey, M. Ruiz y D. Stojanoff *Duality in reconstruction systems* preprint.
- [3] P. Massey, *Optimal reconstruction systems for erasures and for the  $q$ -potential*. Linear Algebra Appl. doi: 10.1016/j.laa.2009.05.001

---

**Autores:** Carlos Peña

**Lugar:** UNCPBA-FCExactas, Departamento de Matemática; NUCOMPA

**Expositor:** Carlos Peña

---

#### Sobre dualidad en álgebras de Banach

En 1951 R. Arens advirtió que el espacio bidual  $\mathcal{U}^{**}$  de un álgebra de Banach  $\mathcal{U}$  admite, asimismo, estructuras de álgebras de Banach (cf. [3]). Una intensa investigación permite aseverar que dichas construcciones son de extrema importancia, ya que dan valiosa información sobre la estructura del álgebra subyacente. En particular, hay una noción de Arens regularidad, cuya conexión con distintos tipos de amenabilidad ha sido investigada por varios autores. De esta suerte, en cierta medida se procura deducir información referida a derivaciones sobre  $\mathcal{U}$ -módulos de Banach desde la estructura misma de  $\mathcal{U}$ . Hemos caracterizado la clase de derivaciones acotadas  $d : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^*$  tales que  $\langle x, d(x) \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathcal{U}$  cuando  $\mathcal{U}^2$  es denso en  $\mathcal{U}$  o cuando  $\mathcal{U}$  es un álgebra de Banach unitaria dual (cf. [3], [2]). El objeto de esta comunicación es comentar dichos resultados y mencionar algunos problemas relacionados con álgebras de Banach asociadas a grupos separados localmente compactos.

R. Arens: *Operations induced in function classes*. Monatsh. für Math. 55, 1-19. MR 13, 372b, 1951.

H. G. Dales, F. Ghahramani & N. Grombaek: *Derivations into iterated duals of Banach algebras*. Studia Mathematica, 128, 1, 19-54, 1998.

A. L. Barrenechea & C. C. Peña: *On bounded dual-valued derivations on certain Banach algebras*. Publications de l'Institut Mathématique. Nouvelle série. Tome 86, 100, Zbl pre05656373, 107-114, 2009.

**Conferencia Invitada**  
**Verónica Dimant**  
**Universidad de San Andrés, Argentina**

---

*M*-ideales en Espacios de Polinomios Homogéneos

La teoría de *M*-ideales fue introducida por Alfsen y Effros en 1972 [1] con el objetivo de generalizar a espacios de Banach generales el concepto de ideal bilátero cerrado de un álgebra  $C^*$ . Un problema que desde el comienzo despertó gran interés y ha sido muy estudiado es el de caracterizar los espacios de Banach  $X$  e  $Y$  para los cuales  $\mathcal{K}(X, Y)$ , el espacio de operadores compactos entre  $X$  e  $Y$ , es *M*-ideal en el espacio de operadores lineales  $\mathcal{L}(X, Y)$ . En esta charla, presentaremos resultados sobre la versión polinomial de este problema, o sea, cuándo el espacio de polinomios  $n$ -homogéneos que son  $w$ -continuos en conjuntos acotados es un *M*-ideal en el espacio de polinomios  $n$ -homogéneos continuos. Mostraremos diversas condiciones suficientes o equivalentes a este hecho, veremos ejemplos y también interesantes consecuencias. Relacionaremos además los resultados lineales y polinomiales.

Alfsen, Erik; Effros, Edward. Structure in real Banach spaces. I, II. Ann. of Math. (2) 96 (1972), 98–128; ibid. (2) 96 (1972), 129–173.

Harmand, Peter; Werner, Dirk; Werner, Wend. *M*-ideals in Banach spaces and Banach algebras. Lecture Notes in Mathematics, 1547. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Dimant, Verónica. *M*-ideals of homogeneous polynomials, preprint.

---

**Autores: Ana Paula Madrid**  
**Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires**  
**Expositor: Ana Paula Madrid**

---

Sobre estudios de dualidad en álgebras de Banach inducidas por operadores diagonales

En esta comunicación mencionamos los avances obtenidos en el estudio de álgebras de Banach generadas por operadores diagonales actuantes sobre un espacio de Hilbert subyacente. Interesa particularmente la descripción precisa del espacio bidual de estas álgebras con objeto de estudiar cuestiones de

Arens regular. La determinación de propiedades de álgebras de operadores construídas a partir de un conjunto de generadores y como estas propiedades quedan determinadas por la estructura de los generadores iniciales es objeto de intensa investigación.

Entre otros tantos resultados cabe mencionar que si un operador compacto sobre un espacio de Hilbert genera un álgebra de Banach amenable el mismo debe ser similar a un operador normal (G. A. Willis: *When the algebra generated by an operator is a menable*, J. Operator Theory 34 (1995), 239-249).

Si  $E$  es un espacio de Banach reflexivo el álgebra de Banach proyectiva  $E \widehat{\otimes} E^*$ , el álgebra nuclear  $\mathcal{N}(E)$ , el álgebra de operadores compactos  $\mathcal{K}(E)$  y el álgebra de operadores aproximables  $\mathcal{A}(E)$  son todas Arens regulares. (N. J. Young: *Periodicity of functionals and representatios of normed algebras on reflexive spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 20, no. 2, 99-120, 1976/77).

El interés en el estudio de productos de Arens se ha dado pues los mismos permiten la extensión de derivaciones continuas a álgebras biduales. (H. G. Dales, F. Ghahramani and N. Gronbaek, *Derivations into iterated duals of Banach algebras*, Studia Mathematica, 128, 19-54, 1998). Para precedentes acerca de nuestras investigaciones sobre propiedades y teoremas de estructura sobre derivaciones en ciertas álgebras de Banach de operadores ver: (A. P. M. & C. C. P.: *On X-Hadamard and B-derivations*, General Maths. Vol 16, N° 1, 41-50, 2008).

---

**Autores:** Manuel Aguirre

**Lugar:** Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires- NU-COMPA

**Expositor:** Manuel Aguirre

---

Fórmulas para las derivadas de orden  $(k - 1)$  de la delta de Dirac soportada en  $[a_1(x_1)^2 + \dots + a_n(x_n)^2]^m$

En este trabajo se introduce la function generalizada definida por

$$\langle V_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^\infty V_+^\lambda, \varphi(x) dx$$

donde  $\lambda$  es un número complejo,  $\varphi$  es una función infinitamente diferenciable y a soporte compacto y  $V(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_px_p^2 - a_{p+1}x_{p+1}^2 - \dots - a_{p+q}x_{p+q}^2$  con  $p + q = n$  dimensión del espacio.

Usando el residuo de  $(x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2)_+^\lambda$  en los puntos  $\lambda = -k, k = 1, 2, \dots$  y  $\lambda = -n/2 - s, s = 0, 1, 2, \dots$  se obtiene el residuo de  $V_+^\lambda$ , en los mismos puntos y se obtienen fórmulas nuevas para  $\delta^{(k-1)}(V^m)$  y  $\delta^{(k-1)}(V_+^m)$ .

Estas expresiones permiten estudiar productos de distribuciones del tipo:  $\delta^{(k-1)}(V^m) \cdot \delta^{(l-1)}(V^m)$  que generalizan otros resultados.

Las referencias relacionadas con este trabajo son las siguientes:

Manuel A. Aguirre T., Proportionality of  $k$ -th derivate of Dirac delta in the hypercone, New Serie, Vol.14, 2000, Fasci. 3-4.

M. Aguirre., The Fourier transform of  $\delta^{(k-1)}(M(x_1, \dots, x_n))$  and  $\delta^{(k-1)}(M(x_1, \dots, x_n) + c^2)$ , accepted to published in International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2010.

M. Aguirre and S. E. Trione, On the distribution  $\delta^{(l)}(P_+^s)^m$ , preprint NÁ°293, Instituto Argentino de Matemática-CONICET, ISSN 0325-6677, 2000.

M. Aguirre, A generalization of the distributional  $\delta^{(l)}(P_+^s)^m$ , International Mathematical Journal, Vol.2, NÁ°4, 2002, pp. 351-359.

I.M. Gelfand and G.E. Shilov, Generalized Functions, Volume I, Academic Press, New York, 1964.

---

**Autores: Marta García**

**Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires- NU-COMPA**

**Expositor: Marta García**

---

El producto distribucional de los núcleos  $N_s(x) \cdot N_m(x)$

Sea  $N_\lambda(x)$  la familia de funciones de distribuciones definidas por

$$N_\lambda(x) = \frac{(1-x^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

donde  $\lambda$  es un número complejo y  $\Gamma(z)$  es la función gamma.

En este trabajo se le da un sentido al producto distribucional

$$N_\lambda(x) \cdot N_\mu(x)$$

obteniendo fórmulas relacionadas con la derivada de orden  $2n$  de la delta de Dirac soportada en  $x$ .

Para ello, primero encontramos la transformada de Fourier de  $N_\lambda(x)$ , teniendo en cuenta el procedimiento seguido por Gel'fand para la transformada de una función generalizada ([1], pag,183) y la fórmula ([1], pag,185, fórmula 2).

Usando la propiedad de Schwartz ([2], pag,286 – fórmula VII,8,5), para funciones generalizadas  $f$  y  $g$

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = (2\pi) \mathcal{F}\{f(x)\} \cdot \mathcal{F}\{g(x)\}$$

y en particular el producto distribucional  $\delta^{(k-1)}(x) \cdot \delta^{(\ell-1)}(x)$  ([3], pág,168), se obtiene una expresión para el producto distribucional  $N_\lambda(x) \cdot N_\mu(x)$ .

Gel'fand and Shilov. *Generalized Functions*- Vol. 1 - Academic Press - Año 1964

Schwartz Laurent. *Theorie des Distributions*—Hermann, París. 1973. Section

Aguirre Manuel International Journal of Pure and Applied Mathematics , Vol 53 , N° 2, año 2009.

---

**Autores: Pablo Ochoa, Andrea Ridolfi, Virginia Vera de Serio**

**Lugar: UNCuyo-ICB-FCAI-FCE**

**Expositor: Andrea Ridolfi**

---

#### Characterization of robust lipschitzian of the feasible solution map

We study the Lipschitzian stability of the feasible solutions map of a primal problem  $(P)$  for an optimization problem described by parameterized systems of infinitely many linear inequalities with bounded coefficients posed in a closed convex cone  $Q$ , in an arbitrary Banach space  $X$  of decision variables (which may be finite-dimensional). The constraints are indexed by an arbitrary set  $T$ . The parameter space of admissible perturbations under consideration is formed by all bounded functions on  $T$  equipped with the standard supremum norm; i.e. it is of  $\ell_\infty$ -type.

By using the computation of the coderivative of the feasible set mapping, we get characterizations of robust Lipschitzian stability of the feasible solutions map. We also analyze the exact Lipschitzian bound and the coderivative norm.

As a preceding result, and a guideline for the research methodology, we consider the corresponding properties in Cánovas et al., [1]. There, the setting of  $(P)$  is similar, but the constraint  $x \in Q$  is new.

Cánovas, M. J.; López, M. A.; Mordukhovich, B. S.; Parra, J. Variational analysis in semi-infinite and infinite programming. I. Stability of linear inequality systems of feasible solutions. *SIAM J. Optim.* **20** (2009), no. 3, 1504–1526.

**Autores:** Ana Barrenechea

**Lugar:** UNCPBA-FCExactas, Departamento de Matemática, NUCOMPA

**Expositor:** Ana Barrenechea

---

#### Espacios de sucesiones y convergencia estocástica

Los espacios de Banach de sucesiones, entre otras tantas aplicaciones, dan un marco adecuado para el estudio de problemas de convergencia y regularidad estocástica. El interés en estos temas radica en sus variadas aplicaciones a integración numérica, informática, resolución de ecuaciones diferenciales, cuestiones de extrapolación y aceleración de convergencia, etc.. Probablemente, una de las referencias más destacables en relación a la regularidad de procesos estocásticos vectoriales o con valores en espacios de Banach sea el trabajo inicial de H. Lavastre (Lavastre, H.: *On the stochastic regularity of sequence transformations operating in a Banach space*. Appl. Mathematicae. 22, 4, 477-484, 1995). El objeto de esta comunicación es comentar como hemos generalizado el denominado *proceso de sumación* de H. Lavastre, debiendo determinar en algunos casos la estructura de clases de operadores acotados sobre espacios de sucesiones de Banach. También se determinan condiciones precisas de convergencia y regularidad estocástica, en diferentes contextos.

# Análisis Numérico

*Organizan:*

*Ricardo Durán y Claudio Padra*



**Conferencia Invitada**

**Rodolfo Rodríguez**

CI<sup>2</sup>MA, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción,  
Casilla 160-C, Concepción, Chile.

---

Aproximación numérica del espectro del rotacional

Se denominan campos libres de fuerza (*force-free fields*) a aquellos que satisfacen  $\text{rot } \mathbf{H} = \lambda \mathbf{H}$ , donde  $\lambda$  es un campo escalar no necesariamente constante ([6]). Este nombre proviene de la magnetohidrodinámica, ya que cuando  $\mathbf{H}$  es el campo magnético, la fuerza de Lorentz que genera,  $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{H} \times (\mu \mathbf{H})$ , es nula. En el caso en que  $\lambda$  es contante, el campo se denomina *lineal* o Trkaliano ([6]) y el problema está naturalmente relacionado con el espectro del operador rotacional. Las autofunciones de este problema se conocen como campos de decaimiento libre (*free-decay fields*) y juegan un rol importante, por ejemplo, en el estudio de turbulencia en física de plasmas.

El problema espectral para el operador rotacional,  $\text{rot } \mathbf{H} = \lambda \mathbf{H}$ , tiene una larga tradición en la física matemática. El estudio del mismo en el ámbito de la dinámica de fluidos se remonta a Beltrami, en 1889 ([3]). Por esta razón, a sus autofunciones también se las denomina *campos de Beltrami*. La condición de contorno natural del problema en dominios acotados es  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ , la cual indica que la acción del campo  $\mathbf{H}$  queda confinada al dominio, ya que este campo resulta tangencial a la frontera del mismo. Soluciones analíticas de este problema sólo se conocen bajo condiciones de simetría. Las primeras fueron obtenidas en 1957 por Chandrasekhar y Kendall ([4]) en el contexto de plasmas astrofísicos, en particular en el estudio de la corona solar.

Más recientemente se han comenzado a estudiar métodos numéricos que permiten calcular campos libres de fuerzas sin suposiciones de simetría ([2, 3]). En este trabajo proponemos una formulación variacional del problema espectral para el operador rotacional, cuya discretización conduce a un problema generalizado de autovalores bien planteado. Proponemos un método para su aproximación numérica basado en un esquema de Galerkin y elementos finitos de Nédélec de orden arbitrario ([5]). Demostramos convergencia espectral, estimaciones óptimas del error y ausencia de modos espúreos. Finalmente presentamos algunos experimentos numéricos que confirman los resultados teóricos y muestran la eficiencia del método.

E. Beltrami, Considerazioni idrodinamiche *Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Let.*, 22 (1889) 122–131. (English translation: *Int. J. Fusion Energy*, 3 (1985) 53–57.)

T.Z. Boulmezaud and T. Amari, Approximation of linear force-free fields in bounded 3-D domains, *Math. Comp. Model.*, 31 (2000) 109–129.

T.Z. Boulmezaud and T. Amari, A finite element method for computing nonlinear force-free fields, *Math. Comp. Model.*, **34** (2001) 903–920.

S. Chandrasekhar and P.C. Kendall On force-free magnetic fields, *Astrophys. J.*, **126** (1957) 457–460.

J.C. Nédélec, Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ , *Numer. Math.*, **35** (1980) 315–341.

V. Trkal, Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin, *Casopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky*, **48** (1919) 302–311.

L. Woltjer, *Prod. Natl. Acad. Sci. USA*, **44** (1958) 489–491.

---

**Autores:** María G. Armentano, Claudio Padra, Rodolfo Rodriguez y Mario Scheble

**Lugar:** Depto. de Matemática, FCEyN - Universidad de Buenos Aires, Centro Atómico Bariloche, Argentina y Depto. de Ingeniería Matemática - Universidad de Concepción, Chile

**Expositor:** María G. Armentano

---

Un método de elementos finitos  $hp$  adaptativo para aproximar los modos de vibración de un sistema de Fluido-Estructura

En este trabajo presentamos y analizamos un método de elementos finitos  $hp$  adaptativo para aproximar los modos de vibración de un conjunto de tubos inmersos en un fluido incompresible contenido en una cavidad rígida.

Obtenemos estimaciones a priori y a posteriori del error e introducimos un estimador de error de tipo residual. Mostramos la confiabilidad global y la eficiencia local del estimador a partir de su equivalencia, salvo términos de mayor orden, con la norma energía del error. Si bien la constante de eficiencia local resulta ser sub-óptima, ya que depende del grado del polinomio en el elemento, cabe señalar que para los métodos  $hp$  no existen aún estimaciones de confiabilidad y eficiencia con ambas constantes independientes del grado del polinomio.

Presentamos también un algoritmo  $hp$  adaptativo y varios experimentos numéricos que muestran la buena performance del algoritmo propuesto.

**Autores:** Eduardo M. Garau, Pedro Morin, Carlos Zuppa  
**Lugar:** IMAL  
**Expositor:** Eduardo M. Garau

---

Aproximación adaptativa de problemas elípticos no lineales

Consideraremos ecuaciones elípticas no lineales de tipo monótono de la forma

$$\begin{cases} -\nabla \cdot [\alpha(\cdot, |\nabla u|^2) \nabla u] = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $\Omega$  es un dominio poligonal o poliédrico con frontera Lipschitz,  $f \in L^2(\Omega)$  está dada y  $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función acotada que satisface hipótesis adecuadas para garantizar la existencia y unicidad de soluciones.

Analizaremos algoritmos adaptativos para la aproximación numérica de este problema basados en métodos de elementos finitos. Por un lado, consideraremos algoritmos suponiendo la resolución *exacta* de la discretización de Galerkin en cada nivel adaptativo, y por otro lado, algoritmos *inexactos* para los que la solución discreta en cada paso es sólo una aproximación de la discretización de Galerkin correspondiente. Realizaremos un estudio de la convergencia y optimalidad de estos algoritmos.

---

**Autores:** Khamron Mekchay, Ricardo H. Nochetto, Pedro Morin  
**Lugar:** Tailandia, Maryland (EEUU), IMAL - CONICET - U.N.Litoral  
**Expositor:** Pedro Morin

---

Un método de elementos finitos adaptativo para el operador de Laplace-Beltrami.

Presentaremos un método de elementos finitos adaptativos de grado polinomial arbitrario para el operador de Laplace-Beltrami sobre superficies  $\Gamma$  que son  $C^1$  en  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ). Primero derivaremos estimadores a posteriori de tipo residual que tienen en cuenta la interacción del error en energía en  $H^1(\Gamma)$  y el error de aproximación de la superficie en  $W_\infty^1(\Gamma)$ . Diseñamos una estrategia de marcado que reduce el estimador de error total, dado por una suma ponderada del error en energía, el error geométrico, y un error de inconsistencia. Probamos una propiedad de contracción condicional para una suma

ponderada del error de energía y el estimador total. El resultado es condicional pues depende de la resolución de la superficie  $\Gamma$  en  $W_\infty^1$ . Al finalizar se presentaremos experimentos numéricos que ilustran la teoría.

---

**Autores:** Leandro Del Pezzo, Ariel Lombardi, Sandra Martinez  
**Lugar:** Universidad de Buenos Aires  
**Expositor:** Sandra Martinez

---

#### Metodo de Galerkin discontinuo para el $p(x)$ -Laplaciano

Estudiaremos un método de elementos finitos discontinuo para aproximar los mínimos de un funcional no-homogeneo.

Mas precisamente; dado  $\eta \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ , buscamos los mínimos de:

$$I(v) = \int_{\Omega} (|\nabla v|^{p(x)} + |v - \eta|^2) dx$$

con  $v - u_D \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ , donde  $p(x)$  es una función suficientemente regular.  $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$  es el espacio de Orlicz de las funciones  $v$  en  $W^{1,1}(\Omega)$  con  $v, \nabla v$  en  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ .

Este problema está motivado por su aplicación a problemas de procesamiento de imágenes. Daremos una breve introducción de como a parecen estos problemas variacionales en este contexto.

Construiremos un método de Galerkin discontinuo para discretizar el problema de minimización y probaremos la convergencia de los minimizantes.

Veremos un ejemplo en dimensión uno que motiva la utilización de este tipo de métodos. En dicho ejemplo tomamos una función  $1 < p(x) \leq 2$  y que en ciertas regiones toma valores cercanos a uno. Mostraremos que la solución tiene derivada grande en dichas regiones y que por lo tanto, los elementos finitos conformes no son adecuados. En la práctica se necesitan mallas muy finas para obtener buenas aproximaciones. En cambio, con el método discontinuo, se logra visualizar el salto de la función tomando pocos nodos.

**Autores:** Domingo A. Tarzia  
**Lugar:** Rosario  
**Expositor:** Domingo A. Tarzia

---

Análisis Numérico de la Convergencia de Problemas de Control Óptimo Elíptico Distribuido Respecto del Coeficiente de Transferencia de Calor

Se considera un dominio acotado  $D$  de  $R^n$  con una frontera regular compuesta de dos porciones de frontera  $F_1$  y  $F_2$ . En Gariboldi - Tarzia, Appl. Math. Optim., 47 (2003), 213-230 (ver también MAT - Serie A, 7 (2004), 31-42), se considera la convergencia de una familia de problemas de controles óptimos distribuidos gobernados por ecuaciones variacionales elípticas cuando el parámetro  $m$  de la familia (el coeficiente de transferencia de calor sobre la porción de frontera  $F_1$ ) tiende a infinito. Se demuestra la convergencia del control óptimo, del estado del sistema y del estado adjunto de la familia de problemas de controles óptimos distribuidos  $(P_m)$  a los correspondientes de un problema de control óptimo distribuido también gobernado por una ecuación variacional elíptica  $(P)$ . Se consideran, tanto para la familia de problemas de controles óptimos  $(P_m)$  como para el problema de control óptimo límite  $(P)$ , las aproximaciones numéricas por el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1, siendo  $h$  el parámetro de elementos finitos. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema y de su estado adjunto y además las funciones de costo respectivas. El objetivo del presente trabajo es el de estudiar los problemas de control óptimo discretos  $(P_{hm})$  (que aproxima a  $(P_m)$ ) y  $(P_h)$  (que aproxima a  $(P)$ ), y las convergencias de los problemas de controles óptimos distribuidos discretos (control óptimo discreto, estado del sistema discreto y estado adjunto discreto) cuando el parámetro  $m$  tiende a infinito y cuando el parámetro  $h$  tiende a cero. Se demuestra que se obtiene un diagrama conmutativo pudiéndose conmutar los límites  $h$  tendiendo a cero y  $m$  tendiendo a infinito.

**Autores:** V. Vampa, M. T. Martín y E. Serrano

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Universidad Nacional de San Martín

**Expositor:** V. Vampa

---

Refinamiento de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales en un contexto wavelet-Galerkin

Se ha extendido en los últimos años la aplicación de métodos basados en wavelets para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. En ese sentido, se han desarrollado diferentes métodos que, a partir de la utilización del esquema de multirresolución, permiten obtener sucesivas aproximaciones a la solución en los espacios de escala correspondientes [1-3]. Con un apropiado tratamiento de las condiciones de borde éstas aproximaciones tienen buenas propiedades de convergencia como se ha mostrado en presentaciones anteriores [3,4].

Sin embargo estos métodos no explotan plenamente las ventajas del análisis multirresolución [5], ya que en ellos se repite el procedimiento para cada nivel de escala. En esta comunicación se presenta una técnica basada en wavelets sobre intervalos para resolver problemas de borde de segundo orden, que utilizando las propiedades de la multirresolución permite mejorar las aproximaciones con una significativa disminución del costo computacional. Se exponen resultados numéricos obtenidos en distintas aplicaciones empleando B-splines.

---

**Autores:** V. Y. González, F. D. Colavecchia y G. Gasaneo

**Lugar:** Universidad Nacional de Cuyo

**Expositor:** V. Yanina González

---

El Método de Cuadratura Discreta en la Ecuación de Schrödinger en coordenadas hiperesféricas

El Método de Cuadratura Discreta (MCD) se utiliza para resolver problemas de ecuaciones diferenciales lineales. Fue introducido por Shizgal y Blackmore [1,2] para resolver problemas de energía cinética y la ecuación de Fokker-Planck. El MCD se basa en discretizar las funciones de onda sobre una grilla de  $N$  puntos que coinciden con las abscisas de cuadratura de una cierta familia de polinomios ortogonales [3,4] y representar el operador derivada como una

matriz finita de orden  $N$ ; de esta manera, encontrar la solución de la ecuación diferencial se reduce a un sistema de ecuaciones lineales.

En este trabajo utilizaremos el MCD para hallar una solución analítica del problema de tres cuerpos definido por la ecuación de Schrodinger en coordenadas hipersféricas

$$(3) \quad [T + V] \Psi = E\Psi$$

donde el operador de energía cinética está definido por

$$(4) \quad T = \frac{-1}{2\mu} \left[ \frac{1}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^5 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\Lambda^2(\omega_5)}{\rho^2} \right],$$

el operador momento angular

$$(5) \quad \Lambda^2 = -\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left( \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{d}{d\alpha} \right) + \frac{\mathbf{j}^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{\mathbf{l}^2}{\sin^2 \alpha},$$

aquí  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{l}$  representan los operadores de momento angular rotacional y centrífugo, respectivamente,  $V$  el potencial del sistema,  $\rho$  el hiper-radio y  $\omega_5$  es el vector de las cinco variables angulares.

Describiremos un procedimiento para construir una base adecuada de polinomios ortogonales no-clásicos con respecto a una función dependiente del potencial  $V$ . Daremos un método analítico para hallar las abscisas y los pesos de la cuadratura determinada por dichos polinomios. Para finalizar, hallaremos la solución analítica de la ecuación 3 por medio del MCD, para casos simples del potencial  $V$ .

[1] B. Shizgal and R. Blackmore, *J. Comp. Phys.* **55**, 313-327 (1984).

[2] B. Shizgal and H. Chen, *J. Chem. Phys.* **104**, 4137-4150 (1996).

[3] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer (2002).

[4] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society (1959).



Análisis Real y Armónico  
y  
Teoría de la Aproximación

*Organizan:*

*Héctor Cuenya, Sheldy Ombrosi y Carlos Peña*



Conferencia Invitada

S. Favier

Universidad Nacional de San Luis. Instituto de Matemática Aplicada San Luis

---

A characterization of the extended best approximation operator in Orlicz spaces

Let  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  be a probability space and let  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  be the set of all  $\mathcal{A}$ -measurable real valued functions defined on  $\Omega$ . Given a  $C^1$  strictly convex function  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  such that  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(t) > 0$  when  $t > 0$  and  $\phi'(0) = 0$ , let  $L^\phi = L^\phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  be the Orlicz space.

We say that a collection  $\mathcal{L}$  of sets in  $\mathcal{A}$  is a  $\sigma$ -lattice if it is closed under countable unions and intersections and contains  $\emptyset$  and  $\Omega$ . Given a  $\sigma$ -lattice  $\mathcal{L}$  we denote by  $\bar{\mathcal{L}}$  the  $\sigma$ -lattice of all the complementary sets of  $\mathcal{L}$ , i.e.  $\bar{\mathcal{L}} = \{A^c : A \in \mathcal{L}\}$ . Denote by  $L^\phi(\mathcal{L})$  all  $\mathcal{L}$ -measurable functions in  $L^\phi$ .

It is well known that for every  $f \in L^\phi$  there exists a unique element  $f_{\mathcal{L}} \in L^\phi(\mathcal{L})$  such that

$$(1) \quad \int_{\Omega} \phi(|f - f_{\mathcal{L}}|) d\mu = \inf_{h \in L^\phi(\mathcal{L})} \int_{\Omega} \phi(|f - h|) d\mu.$$

The element  $f_{\mathcal{L}}$  is called a best  $\phi$ -approximation of  $f$  given  $\mathcal{L}$ , and we set  $\mu_{\mathcal{L}}(\cdot)$  for the mapping  $f \rightarrow f_{\mathcal{L}}$  defined on  $L^\phi$  which will be called the best approximation operator.

Let  $f \in L^{\phi'}$ , then  $g = \mu_{\mathcal{L}}^*(f)$  is called the extended best approximation if and only if  $g \in L^{\phi'}(\mathcal{L})$  and  $\int_C \phi'(f - g) d\mu \leq 0$  for all  $C \in \mathcal{L}$  and  $\int_{\{g \geq a\}} \phi'(f - g) d\mu = 0$  for all  $a \in \mathbb{R}$ .

This operator was introduced in [2] in a monotone continuous way. Here we prove that this operator is the same as the one introduced in [1].

In this manuscript we give sufficient conditions on an operator  $T : L^{\phi'} \rightarrow L^\phi$  assuring that  $T$  is the extended best  $\phi$ -approximation operator, given a suitable  $\sigma$ -lattice  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ , and gives a characterization of the extended best  $\phi$ -approximation operator.

In [3] it is considered this characterization problem just in  $L^\phi$ . We point out that our conditions are implied, by those in that paper, in the  $L^\phi$  case.

I. Carrizo, S. Favier and F. Zó. *Extension of the Best Approximation Operator in Orlicz Spaces*. Abstract and Applied Analysis Volume 2008 (2008), Article ID 374742, 15 pages.

S. Favier and F. Zó. *Extension of the best approximation operator in Orlicz space and weak-type inequalities*. Abstr. Appl. Anal., 6 (2001), 101-114.

D. Landers and L. Rogge. *A characterization of best  $\phi$ -approximants* Transaction of The Am. Math. Soc. 267 (1981), 259-264.

**Autores:** H.H. Cuenya  
**Lugar:** Universidad Nacional de Río Cuarto  
**Expositor:** H.H. Cuenya

---

#### Extensión del operador de mejor aproximación polinomial

Dado un espacio de medida finita  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  y  $1 \leq p < \infty$ , como es usual sea  $L^p$  el espacio de funciones medibles a valores reales definidas sobre  $\Omega$  tal que  $\|f\|_p^p := \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$ . Sea  $\mathcal{S} \subset L^p$  el espacio de polinomios generalizados generado por el conjunto de funciones acotadas  $\{\psi_j\}_{j=1}^s$ , es decir  $\mathcal{S} = \{\sum_{j=1}^s a_j \psi_j : a_j \in \mathbb{R}\}$ .

Para  $p > 1$  y  $f \in L^p$ , es bien conocido que existe un único polinomio que mejor aproxima a  $f$  desde  $\mathcal{S}$ , o sea  $\|f - P\|_p \leq \|f - Q\|_p$  para todo  $Q \in \mathcal{S}$ . De esta manera tenemos definido el operador de mejor aproximación  $T : L^p \rightarrow \mathcal{S}$ , por  $T(f) = P$ . Una caracterización de  $P$  es que es el único polinomio generalizado que satisface

$$(2) \quad \int_{\Omega} |f - P|^{p-1} \operatorname{sgn}(f - P) Q d\mu = 0, \quad \text{para todo } Q \in \mathcal{S}.$$

Si  $f \in L^{p-1}$ , nosotros probamos la existencia de  $P \in \mathcal{S}$  satisfaciendo (2). Más aún probamos que un tal  $P$  es único. Esto permite extender el operador  $T$  al espacio  $L^{p-1}$ . También se prueba que el operador extendido es continuo.

En el caso  $p = 1$ , existe el mejor aproximante pero no hay unicidad en general. Nosotros extendemos aquí el operador de mejor aproximación, bajo ciertas condiciones del subespacio  $\mathcal{S}$ , a un espacio  $L_0$ , el cual contiene los espacios  $L^q$ , para todo  $q > 0$ . En el caso particular,  $s = 1$  y  $\psi_1 = 1$ ,  $\mathcal{S}$  es el espacio de las funciones constantes y se puede extender el operador de mejor aproximación a un espacio más grande que  $L_0$ , que es el espacio de funciones medibles finitas en casi todo punto.

Finalmente, para  $s$  arbitrario y  $p = 1$ , estudiamos propiedades de continuidad del operador extendido y probamos que  $T(f)$  es un conjunto compacto y convexo.

Cabe mencionar que en el caso particular de mejor aproximación por constantes, ya es conocida la extensión del operador de mejor aproximación. Además varios autores han probado propiedades de un tal operador, incluso para espacios más generales que los espacios  $L^p$ .

**Autores:** Nicolás Cortés y Felipe Zó  
**Lugar:** Universidad Nacional de San Luis  
**Expositor:** Nicolás Cortés

---

Error Asintótico en Normas Generales para Ciertas Clases Completamente Interpolantes

Sea  $g$  una función  $n$  veces diferenciable definida en un intervalo abierto  $I$ , tal que su derivada no se anule en  $I$ . Se estudian problemas de mejor aproximación local, donde la clase aproximante es el espacio de las funciones de la forma  $P \circ g$ , con  $P$  perteneciente al conjunto  $\pi^m$  de los polinomios de grado menor o igual que  $m$ .

Esta clase resuelve el problema de interpolación de Hermite: dados  $k$  puntos  $x_1, \dots, x_k$ , un conjunto de  $k$  enteros no negativos  $n_i$ , y una función  $f$ ,  $n_i$  veces diferenciable en  $x_i$ , si  $n \geq \max_{1 \leq i \leq k} n_i$ , y  $m + 1 = \sum_{i=1}^k n_i + k$ , existe un único polinomio  $P \in \pi^m$  tal que

$$(3) \quad (P \circ g)^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, n_i.$$

Consideramos entonces una norma  $\|\cdot\|$  monótona, tal que  $\|1\| < \infty$ , donde 1 denota a la correspondiente función constante.

Para el caso de un solo punto ( $k = 1$ ) sean  $a = x_1$  y  $n = n_1$ , de modo que  $m = n$ . Denotamos por  $P_{a, \varepsilon}$  a un polinomio en  $\pi^m$  que minimiza la norma  $\|(f - P \circ g)_{(a+\varepsilon)}\|$  sobre  $\pi^m$  y por  $P_{a, m}$  al único polinomio en  $\pi^m$  que verifica (3). Entonces, si  $f$  y  $g$  son  $m + 1$  veces diferenciables, analizamos la convergencia cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  del error asintótico  $\varepsilon^{-m-1} \|(f - P_{a, \varepsilon} \circ g)_{(a+\varepsilon)}\|$  al límite

$$\frac{|\phi_{a, m+1}^{(m+1)}(a)|}{(m+1)!} \inf_{P \in \pi^m} \|\varphi_{m+1} - P\|,$$

donde  $\phi_{a, m+1} = (P_{a, m+1} - P_{a, m}) \circ g$  y  $\varphi_{m+1}(x) = x^{m+1}$ .

1. R. Macías y F. Zó. "Weighted Best Local  $L^p$  Approximation". J.A. Th. 42 (1984), 181-192.
2. F. Zó y H.H. Cuenya. "Best Approximation on Small Regions. A General Approach". Advanced Courses of Mathematical Analysis II, Proceedings of the Second International School. World Scientific Publishing Co. (2007), 193-213.
3. C.K.Chui, H. Diamond, and L.Raphael. "Best Local Approximation in Several Variables". J.A. Th. 40 (1984), 343-350.
4. H.Maehly und Ch.Witzgall. "Tschebyscheff-Approximationen in Kleinen Intervallen I. Approximation Durch Polynome". Numerische Mathematik 2. (1960), 142-150.

**Autores:** H. H. Cuenya, F. E. Levis, C. N. Rodríguez  
**Lugar:** Universidad Nacional de Río Cuarto  
**Expositor:** C. N. Rodríguez

---

### Mejor aproximación a datos distribuidos en una banda

En algunas situaciones nos encontramos con el problema de aproximar una función de origen físico la cual está contaminada por diferentes causas. Por ejemplo, él se presenta cuando recibimos una señal y observamos en la pantalla de un osciloscopio, una banda producida por ruidos u otros factores. Para resolver un problema de aproximación para datos que se presentan en una tal banda, un criterio de selección es necesario. Más precisamente, debemos elegir una medida de desvío de esa banda a una clase aproximante dada. Un camino para ello puede ser aproximar una función multivaluada con valores sobre un segmento usando la métrica de Hausdorff en el plano, otro puede ser, considerar las mejores aproximaciones simultáneas al conjunto de todas las funciones cuyos gráficos viven en una banda. En este trabajo nosotros damos una medida de desviación alternativa y establecemos una relación con la mencionada en último término.

Sea  $1 \leq p < \infty$  y sea  $F : [a, b] \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  una función multivaluada con  $F(x)$  un conjunto medible Lebesgue para todo  $x \in [a, b]$ . Consideramos la siguiente función como medida de desviación de  $F$  a  $Q$ , donde  $Q$  es un elemento de una clase aproximante  $\mathcal{S}$ ,

$$(4) \quad \Phi_{[a,b]}(F, Q) = \left( \int_a^b \int_{F(x)} |y - Q(x)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dadas dos funciones  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \leq g$ , nosotros sólo consideraremos aquí la función  $F$  definida por  $F(x) = [f(x), g(x)]$  para cada  $x \in [a, b]$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio vectorial de dimensión finita.

Nuestro principal objetivo es estudiar el comportamiento asintótico de aquellos  $Q$  que minimizan (4), cuando la banda se reduce de la siguiente manera :

- a) El intervalo  $[a, b]$  es sustituido por  $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ , donde  $\epsilon$  tiende a 0, es decir, la banda se reduce horizontalmente.
- b) Las funciones  $f$  y  $g$  son reemplazadas por una familia de funciones  $f_\epsilon, g_\epsilon$ , donde  $f_\epsilon, g_\epsilon$  convergen a una función  $h$  cuando  $\epsilon$  tiende a 0. Ésto es, la banda se reduce verticalmente.

El problema de aproximación en a) esta relacionado con el problema de mejor aproximación simultánea local a  $f$  y  $g$ . Con respecto al caso b) probamos que las mejores aproximaciones convergen a una mejor aproximación de  $h$  respecto a una norma pesada determinada por los datos.

---

**Conferencia Invitada**

**Hugo Aimar**

**IMAL - Universidad Nacional del Litoral**

---

Wavelets y regularidad Besov de temperaturas

Extendemos al caso parabólico un teorema de Dahlke y DeVore [DD] sobre la mejora de la regularidad Besov de funciones armónicas. Precisamente probamos el siguiente resultado.

*Teorema. Sea  $D$  un dominio acotado y Lipschitz en  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $\Omega = D \times (0, T)$  el dominio cilíndrico asociado en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Si  $u = u(x, t)$  es solución de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  en  $\Omega$  y si  $u \in L^p((0, T); B_p^{\lambda, p}(D))$  para algún  $1 < p < \infty$  y  $\lambda > 0$ , entonces  $u \in L^\tau((0, T); B_\tau^{\alpha, \tau}(D))$  para todo  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < \frac{\lambda d}{d-1}$  y para  $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$ .*

El resultado en [DD] sigue de este teorema parabólico. La demostración se basa en los resultados en [AGI] y en la caracterización por medio de wavelets de los espacios de Besov.

Hugo Aimar, Ivana Gómez, and Bibiana Iaffei, *Parabolic mean values and maximal estimates for gradients of temperatures*, J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 8, 1939–1956.  
Stephan Dahlke and Ronald A. DeVore, *Besov regularity for elliptic boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations 22 (1997), no. 1-2, 1–16.

---

**Autores: Gustavo E. Massaccesi**

**Lugar: Universidad de Buenos Aires**

**Expositor: Gustavo E. Massaccesi**

---

Existencia de Generadores Simétricos para Espacios Invariantes por  
Traslaciones Simétricos

Los *espacios invariantes por traslaciones enteras* son subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  con la propiedad de que si se toma cualquier función  $f$  en el subespacio, todas las traslaciones enteras  $\mathbf{T}^\alpha(f)(x) = f(x - \alpha)$  también están en

él. Si  $V$  es uno de estos espacios, decimos que  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots\}$  es un *conjunto de generadores* si  $V$  es la clausura de las combinaciones lineales de las traslaciones enteras de  $\phi_i$ , o sea

$$V = \langle \Phi \rangle_T = \overline{\langle \mathbf{T}^\alpha \phi_i, i \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}^n \rangle}.$$

Como cada espacio invariante por traslaciones tiene múltiples sistemas de generadores, es interesante buscar sistemas de generadores que tengan propiedades adicionales.

Para las aplicaciones al procesamiento de señales e imágenes es útil que los generadores sean funciones simétricas o antisimétricas en  $\mathbb{R}$ . Más en general, en este trabajo consideramos en  $\mathbb{R}^n$ , un grupo de simetrías  $G$  formado por matrices enteras de  $n \times n$ , con inversas enteras, que preservan la red de traslaciones enteras. En  $\mathbb{R}^2$  los grupos de simetrías considerados permiten analizar, entre otras, las reflexiones de las funciones sobre los eje  $x$  ó  $y$  y también las rotaciones de  $90^\circ$  del plano.

Para un dado grupo de simetrías, llamamos *simétricas* a las funciones  $f(x)$  tales que  $f(x) = f(Ax)$ , que son invariantes por la acción de todas las matrices  $A$  en este grupo. Análogamente, decimos que un espacio invariante por traslaciones enteras  $V$  es *simétrico* si para toda función  $f(x)$  en el subespacio, se tiene que  $f(Ax)$  también está en él para todas las matrices  $A$  en este grupo.

Probamos que para cualquier grupo de matrices como los descritos y cualquier subespacio invariante por traslaciones enteras en  $\mathbb{R}^n$  que sea simétrico respecto a este grupo, existe un sistema de generadores quasi-ortonormal formado por funciones simétricas con respecto al mismo grupo.

Por ejemplo al considerar el espacio invariante por traslaciones enteras generado por la función característica del  $[0, 1]$  se obtiene el espacio de las funciones que son constantes sobre los intervalos enteros. Este espacio es invariante por simetría respecto al origen de coordenadas, o sea que dada una función  $f(x)$  que está en este espacio, su simétrica  $f(-x)$  también lo está. Sin embargo, la función generadora  $\chi_{[0,1]}$  inicial no es simétrica ni antisimétrica. Con el resultado de este trabajo obtenemos que hay una función  $g(x)$  que genera el mismo subespacio que es simétrica, o sea que  $g(x) = g(-x)$ .

**Autores:** Marcela Fabio y Eduardo Serrano  
**Lugar:** UNSAM  
**Expositor:** Marcela Fabio

---

Diseño de funciones elementales combinando la Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert

Interesa estudiar representaciones en  $L^2(\mathbb{R})$  de la forma:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(x) + r(x)$$

donde las componentes  $g_k$  son suaves, oscilantes y bien localizadas en frecuencia. En particular, se supone que poseen la estructura:

$$g_k(x) = A_k(x) \cos(\varphi_k(x)),$$

siendo  $A_k$  y  $\varphi_k$  el módulo y fase de la Transformada de Hilbert de  $g_k$ . La función  $r$  es un residuo, sin estructura, que puede incluir una tendencia polinomial, componentes no oscilantes o fenómenos puntuales.

En el contexto del procesamiento de señales, se pretenden especiales propiedades para las funciones  $g_k$ . En particular, que estén asociados a frecuencias instantáneas bien definidas, con amplitudes y fases suaves sobre su dominio efectivo. En otras palabras, ondas que exhiban patrones armónicos, variantes en el tiempo pero reconocibles. Tal es el caso, por ejemplo, de los chirps o de las ondas casi-monocromáticas de amplitud variable.

Las elecciones de las funciones  $g_k$  pueden ser muy diversas, como se ve en la literatura existente. Más aún, en muchos casos los métodos de representación propuestos son de naturaleza empírica.

En este trabajo expondremos un diseño de descomposición basado en una particular aplicación de la Transformada Wavelet asociada con la Transformada de Hilbert y se exhibe una clase de wavelets bien adaptadas a los propósitos arriba mencionados.

**Autores:** Horacio A. De Pasquale  
**Lugar:** Universidad Nacional de Mar del Plata  
**Expositor:** Horacio A. De Pasquale

---

#### Un espacio fraccionario del tipo BMO y sistemas afines

Se presenta un espacio de funciones fraccionario definido sobre un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  del tipo BMO y algunas de sus propiedades.

Dado un sistema afín para  $L^2(\mathbb{R}^n)$  asociado a una matriz de dilatación que preserva el reticulado, la descomposición del funcional wavelet en sus partes diagonal y off diagonal, permite considerar un operador definido sobre cierto subconjunto denso de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . El espacio funcional fraccionario surge naturalmente cuando se estudian las relaciones entre las propiedades del sistema afín y el operador ya mencionado.

Algunas propiedades de tal operador relacionando los tres temas se presentan, en particular una caracterización de sistemas de Bessel afines y una caracterización de ciertos tipos de marcos afines.

---

**Conferencia Invitada**  
**Ezequiel Rela**  
**Universidad de Buenos Aires**

---

#### Cotas superiores para conjuntos de Furstenberg generalizados

Dado  $\alpha \in (0, 1]$  decimos que un conjunto compacto  $E \subset \mathbb{R}^2$  está en la clase de Furstenberg  $F_\alpha$  si para cada dirección  $e \in \mathbb{S}$  existe un segmento unitario  $\ell_e$  tal que  $\dim_H(\ell_e \cap E) \geq \alpha$ . Se sabe que si  $\alpha \in (0, 1]$  y  $E \in F_\alpha$ , entonces

$$(5) \quad \max \left\{ \alpha + \frac{1}{2}; 2\alpha \right\} \leq \gamma(\alpha) \leq \frac{1+3\alpha}{2}, \quad \alpha \in (0, 1]$$

donde  $\gamma(\alpha) = \inf\{\dim(E) : E \in F_\alpha\}$ . Si consideramos la medida de Hausdorff  $h$ -dimensional  $\mathcal{H}^h$  asociada a una función de dimensión  $h$  (positiva, no-decreciente, continua y con  $h(0) = 0$ ), tenemos una manera natural de extender la noción de conjunto de Furstenberg asociado a una función de dimensión  $h$ . Dada  $h \in \mathbb{H}$ , vamos a decir que  $E \in F_h$  si, para cada  $e \in \mathbb{S}$ , vale que  $\mathcal{H}^h(\ell_e \cap E) > 0$ .

En esta charla nos enfocaremos en las cotas superiores, extendiendo a este más amplio contexto la desigualdad del lado derecho de (5). Mostraremos que, en cierto sentido, la relación  $\alpha \rightarrow \frac{1+3\alpha}{2}$  se traduce en  $h \rightarrow \sqrt{h}^{\frac{3}{2}}$ .

Usando esta generalización de los conjuntos de Furstenberg, podemos refinar los resultados conocidos para el caso clásico. Además obtenemos un resultado ajustado para una subclase de conjuntos de Furstenberg muy chicos. Más precisamente, para elección particular de  $g(x) = \frac{1}{\log(\frac{1}{x})}$ , que es una función de dimensión “cero dimensional”, construimos un conjunto  $E \in F_g$  de dimensión de Hausdorff no mayor que  $\frac{1}{2}$ . Los resultados obtenidos en [2] muestran que  $\frac{1}{2}$  es una cota inferior para la dimensión de Hausdorff de cualquier  $E \in F_g$ . Por lo tanto, con la construcción presentada aquí, el valor  $\frac{1}{2}$  es el apropiado para la clase  $F_g$ . Esto puede considerarse como una extensión de (5) al caso límite  $\alpha = 0$ .

Katz, N. and Tao, T. Some connections between Falconer's distance set conjecture and sets of Furstenberg type. *New York J. Math.*, 7:149–187 (electronic), 2001.

Molter, U. and Rela, E. Improving dimension estimates for Furstenberg-type sets. <http://arxiv.org/abs/0904.2710>

Molter, U. and Rela, E. Sharp dimension bounds for Furstenberg-type sets. <http://arxiv.org/abs/1006.4862>

Tao, T. Finite field analogues of the Erdős, Falconer, and Furstenberg problems, <http://ftp.math.ucla.edu/tao/preprints/Expository/finite.dvi>.

Wolff, T. Recent work connected with the Keakey problem. In *Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996)*, 129–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

---

**Autores: Ivana Carrizo, Sigrid Heineken**

**Lugar: IMASL-UNSL, FCEyN-UBA**

**Expositor: Sigrid Heineken**

---

#### Caracterización de duales generalizados a partir de un potencial de marco mixto

En un espacio de Hilbert de dimensión finita introducimos el concepto de *potencial de marco mixto*, el cual generaliza la noción de potencial de marco de Benedetto y Fickus. Caracterizamos los minimizadores de este nuevo potencial sobre un dominio restringido. Obtenemos condiciones necesarias y suficientes sobre una sucesión de números reales  $\{\alpha_m\}_{m=1,\dots,N}$  en orden de tener marcos duales generalizados  $\{f_m\}_{m=1,\dots,N}$ ,  $\{g_m\}_{m=1,\dots,N}$  tales que  $\langle f_m, g_m \rangle = \alpha_m$ . Además encontramos que los elementos de los marcos duales generalizado pueden obtenerse con la norma deseada.

**Autores:** K. Hare, F. Mendivil, L. Zberman  
**Lugar:** Waterloo/Nova Scotia/Buenos Aires  
**Expositor:** L. Zberman

---

#### Reordenamientos de Conjuntos de Cantor

A cada conjunto de Cantor  $C$  puede asociarse la colección (numerable) de intervalos de su complemento abiertos y acotados. Un *reordenamiento* de  $C$  tiene intervalos complementarios de igual longitud pero diferente ubicación. Estudiamos la  $h$  medida de Hausdorff y packing de los reordenamientos de conjuntos de Cantor dados por una sucesión de intervalos complementarios decrecientes en longitud. Para estos conjuntos construimos un reordenamiento que tiene medida de Hausdorff maximal y premedida packing minimal para su función de dimensión (salvo constantes). También probamos que si la medida packing de uno de estos conjunto de Cantor es positiva entonces existe un reordenamiento que tiene medida packing infinita.

---

**Autores:** Hugo Aimar, Ana Bernardis y Luis Nowak  
**Lugar:** IMAL-CONICET-UNL-UNComa  
**Expositor:** Luis Nowak

---

#### Sobre clases de tipo Lipschitz y bases de Haar en espacios métricos con medida

La caracterización de los espacios Lipschitz usuales en el contexto euclídeo via los coeficientes de Haar es obtenida en [AB]. En dicho trabajo los autores prueban tal caracterización para métricas parabólicas definidas en  $\mathbb{R}^n$ . El uso de la estructura algebraica que posee  $\mathbb{R}^n$ , reflejada en la posibilidad de trasladar y dilatar, es una herramienta crucial para la demostración dada en ese trabajo.

Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , el espacio  $\Lambda_\alpha$  con  $\alpha > 0$  de las funciones de tipo Lipschitz- $\alpha$  sobre  $X$  es el espacio de todas las funciones  $f$  definidas sobre  $X$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^\alpha,$$

para alguna constante  $C$  y para todo par de puntos  $x, y \in X$ .

Sistemas de tipo Haar  $\mathcal{H}$  sobre espacios de tipo homogéneo fueron definidos en [A] (ver también [ABI]). Para abordar el problema de la caracterización del espacio  $\Lambda_\alpha$  via los coeficientes de Haar en el contexto general de espacios de tipo homogéneo nos encontramos con la dificultad de carecer, en

principio, de estructura algebraica. Sin embargo, con un enfoque puramente geométrico probaremos que tal caracterización es posible.

Por otro lado, usando la caracterización antes mencionada, damos una nueva prueba de la equivalencia de las clases  $\Lambda_\alpha$  y las clases de Campanato que fuera dada por Macías y Segovia en [MS].

[A] H. Aimar, *Construction of Haar type bases on quasi-metric spaces with finite Assouad dimension*, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex., F. y Nat., Buenos Aires 54 (2004).

[AB] H. Aimar and A. Bernardis, *Fourier versus wavelets: a simple approach to Lipschitz regularity*, Rev. UMA 40 (1996) 219–224.

[ABI] H. Aimar, A. Bernardis and B. Iaffei, *Multiresolution approximation and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*, J. Approx. Theory, 148 (2007) 12–34.

[MS] R. Macías and C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*. Adv. in Math. 33 (1979), 271–309.

---

**Autores: Ignacio Garcia**

**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

**Expositor: Ignacio Garcia**

---

#### Sobre una propiedad de las premedidas packing

Un resultado de Besicovitch afirma que si  $E \subset \mathbb{R}^n$  verifica que su medida de Hausdorff  $h$ -dimensional,  $\mathcal{H}^h$ , es nula, entonces existe una función de dimensión  $g$  menor que  $h$  tal que  $\mathcal{H}^g(E) = 0$ . Por otro lado, si  $E$  es analítico y no tiene  $\mathcal{H}^h$ -medida  $\sigma$ -finita entonces existe una función de dimensión  $f$  mayor que  $h$  tal que  $E$  no tiene  $\mathcal{H}^f$ -medida  $\sigma$ -finita.

En esta charla tratamos los resultados análogos correspondientes a premedidas packing. Comentaremos además qué ocurre con las medidas packing.

**Conferencia Invitada**  
**Liliana de Rosa**  
**Universidad de Buenos Aires**

---

Desigualdad de Fefferman-Stein para el operador maximal fraccionario lateral

C. Fefferman and E. M. Stein probaron en [2] para el operador maximal de Hardy-Littlewood  $M$ ; el siguiente resultado: Para todo  $p : 1 < p < \infty$ ; existe una constante  $C > 0$  tal que dadas funciones medibles  $w \geq 0$  y  $f$  vale la desigualdad,

$$\int_{R^n} Mf(x)^p w(x) dx \leq C \int_{R^n} f(x)^p Mw(x) dx$$

Usando el Lema de descomposición de Calderón-Zygmund, demuestran que  $M$  es de tipo débil  $(1; 1)$  con respecto al par de pesos  $(w; Mw)$  y aplicando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz obtienen que  $M$  es de tipo fuerte  $(p; p)$ ;  $(p > 1)$  con respecto a  $(w; Mw)$ .

En el caso lateral, a partir del trabajo [3] de F. J. Martín-Reyes se demuestra que  $M^+$  es de tipo fuerte  $(p; p)$ ;  $(p > 1)$  con respecto al par de pesos  $(w; M^-w)$ .

Con respecto al operador maximal fraccionario  $M_\alpha$ ;  $(0 < \alpha < n)$ ; D. Cruz-Uribe, SFO en [1] obtiene el tipo fuerte  $(p; p)$ ;  $(p > 1)$  de  $M_\alpha$  con respecto al par de pesos  $(w; M_{\alpha p}w)$ .

En el trabajo [4], se prueba una versión fraccionaria del Lema de descomposición de Calderón-Zygmund. Aplicando este resultado se obtiene bajo una condición adecuada sobre el par de pesos  $(w; v)$  el tipo débil  $(p; p)$ ;  $(p > 1)$  del operador maximal fraccionario lateral  $M_\alpha^+$  con respecto a  $(w; v)$ .

Esta acotación de tipo débil junto con un teorema de interpolación con cambio de medidas, me permite demostrar que: Para todo  $p : 1 < p < 1/\alpha$  existe una constante  $C > 0$  tal que dadas funciones medibles  $w \geq 0$  y  $f$  vale la desigualdad,

$$\int_R M_\alpha^+ f(x)^p w(x) dx \leq C \int_R f(x)^p M_{\alpha p}^- w(x) dx.$$

[1] D. Cruz-Uribe, New proofs of two weight norm inequalities for the maximal operator, Georgian Math. J. 7 (2000), 33-42.

[2] C. Fefferman and E. M. Stein, Some maximal inequalities, Amer. J. Math. 93 (1971), 107-115.

[3] F. J. Martín-Reyes, New proofs of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993) 3, 691-698.

[4] L. de Rosa, Two weight norm inequalities for fractional one-sided maximal and integral operators, *Comment. Math. Carolinae* Vol. 47, 1, (2006), 35-46.

---

**Autores: Ana Bernardis, Osvaldo Gorosito, Gladis Pradolini**  
**Lugar: IMAL - Universidad Nacional del Litoral**  
**Expositor: Osvaldo Gorosito**

---

Acotaciones de operadores multilineales de tipo potencial

Se estudian acotaciones débiles y fuertes con pesos para operadores multilineales de tipo potencial y su correspondiente conmutador, extendiendo algunos de los resultados probados en [M] y [P] para el caso de la integral fraccionaria multilineal.

[M] Moen, K.: "Weighted inequalities for multilinear fractional integral operators", *Collect. Math.* 60 (2) (2009), 213-238.

[P] Pradolini, G.: "Weighted inequalities and pointwise estimates for the multilinear fractional integral and maximal operators", *J. Math. Anal. and Appl.* 367, (2), (2010), 640-656.

---

**Autores: S. Ombrosi, C. Pérez, J. Recchi**  
**Lugar: Universidad Nacional del Sur**  
**Expositor: J. Recchi**

---

Acotaciones óptimas para el Operador Integral Fraccionario

Dado el Operador Integral fraccionario

$$I_{\alpha}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Hemos probado que:

Si  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$  y  $q$  definido por la ecuación  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ , y sea  $w \in A_{1,q}$ , entonces:

$$\| I_{\alpha}f \|_{L^q(w^q)} \leq C[w]_{A_{1,q}}^{1-\frac{\alpha}{n}} \| f \|_{L^p(w^p)}$$

y esta estimación es óptima respecto a la dependencia de la constante del peso  $w$ .

Un resultado similar para Operadores de Calderón-Zygmund fue obtenido por Lerner Ombrosi y Pérez en [LOP].

Por otro lado, como se puede ver en [CPSS], para un peso  $w$  cualquiera, en general la siguiente desigualdad no es válida:

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x) dx$$

Sin embargo, se ha probado que si  $w$  tiene cierta regularidad, vale

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq C(w) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x) dx$$

También estudiamos cuán óptima puede ser la constante  $C(w)$  dependiendo de la regularidad del peso.

M.J. Carro, C. Pérez, F. Soria and J. Soria, *Examples and counterexamples for fractional operators*, Indiana University Mathematics Journal **54** (2005), 627-644.

A.K. Lerner, S. Ombrosi and C. Pérez, *Sharp  $A_1$  bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, International Mathematics Research Notices **6** (2008), Art. ID rnm1 61, 11pp. 42B20.

---

**Autores: Mauricio Ramseyer, Oscar Salinas, Beatriz Viviani**  
**Lugar: IMAL**  
**Expositor: Mauricio Ramseyer**

---

#### Caracterización puntual de funciones en espacios de tipo Lipschitz integral con $p$ variables

Consideremos el operador integral fraccionaria  $I_\alpha$ , con  $0 < \alpha$  el espacio  $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$  de las funciones  $f \in L^1_{loc}$  para las cuales existe una constante  $C$  tal que

$$\frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}} \|\chi_{2B}\|_{p'(\cdot)}} \int_B |f(x) - m_B f| dx \leq C$$

para toda bola  $B \in \mathbb{R}^n$  donde  $p'(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-1}$  y  $\|\cdot\|_{p'(\cdot)}$  es la norma en el espacio  $L^{p'(\cdot)}$  (Ver [1]).

Bajo ciertas condiciones sobre la función exponente se logra una caracterización puntual para las funciones en  $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ . Con ella se puede probar la acotación de una extensión adecuada del operador  $I_\alpha$  desde  $\mathfrak{L}_{\beta,p(\cdot)}$  en  $\mathfrak{L}_{\alpha+\beta,p(\cdot)}$  con  $0 < \beta$ .

O. Kováčik, J. Rákosník. *On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$* . Czechoslovak Math. J. 41(116) (1991), 4, 592-618.

---

**Conferencia Invitada**  
**Gladis Pradolini**  
**IMAL - Universidad Nacional del Litoral**

---

**Estimaciones con pesos para operadores fraccionarios multilineales**

En este trabajo se estudian acotaciones con pesos y estimaciones puntuales entre la integral y la maximal fraccionaria multilineal. En particular se extienden al contexto multilineal algunos de los resultados probados en [CPSS]. Se prueban además estimaciones puntuales pesadas entre la maximal fraccionaria multilineal asociada a una función de Young  $B$  y la maximal multilineal asociada a la función de Young  $\psi(t) = B(t^{1-\alpha/(nm)})^{nm/(nm-\alpha)}$ , para  $0 < \alpha$ .

[CPSS] Carro, M. J., Pérez, C., Soria, F. and Soria, J.: *Maximal functions and the control of weighted inequalities for the fractional integral operator*, Indiana Univ. Math. J. 54 (2005), 627-644.

---

**Autores: María Silvina Riveros**  
**Lugar: FaMAF, UNC**  
**Expositor: María Silvina Riveros**

---

**Extrapolación con pesos desde infinito de operadores multilineales**

En el artículo de L. Grafakos y J.M. Martell [GM], se prueba una versión del Teorema de Extrapolación de Rubio de Francia para operadores multilineales, concretamente:

Sea  $T$  definido en  $\prod_{j=1}^m L^{p_j}(w_j^{p_j})$ , donde  $(p_1, \dots, p_m)$  es una  $m$ -upla de multiíndices con  $1 \leq p_j < \infty$  y la  $m$ -upla de pesos  $(w_1^{p_1}, \dots, w_m^{p_m}) \in (A_{p_1}, \dots, A_{p_m})$ .

**Teorema[GM].** *Supongamos que para  $1 \leq q_1, \dots, q_m < \infty$ ,  $\frac{1}{m} \leq q < \infty$  tal que  $\frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q}$  y tal que para toda  $m$ -upla de pesos  $(w_1^{q_1}, \dots, w_m^{q_m}) \in (A_{q_1}, \dots, A_{q_m})$  y funciones  $f_j \in L^{q_j}(w_j^{q_j})$  se tiene*

---

$$|T(f_1, \dots, f_m)|_{q, w_1^q \dots w_m^q} \leq C \prod_{j=1}^m |f_j|_{q_j, w_j^{q_j}}. \quad (1)$$

Entonces para toda  $m$ -upla de índices  $1 < p_1, \dots, p_m < \infty$ , y  $\frac{1}{m} < p < \infty$  que satisfacen  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$ , y para toda  $m$ -upla de pesos  $(w_1^{p_1}, \dots, w_m^{p_m}) \in (A_{p_1}, \dots, A_{p_m})$  existe  $C$  tal que la desigualdad (1) es válida.

En el trabajo de E. Harboure, R. Macías y C. Segovia [HMS] se probó un resultado de Extrapolación como el de Rubio de Francia pero comenzando desde un extremo, es decir suponiendo que el operador satisface una desigualdad con pesos en norma infinito, para una clase de pesos determinada. En este trabajo probaremos el resultado análogo para estos operadores multilineales.

**Teorema.** Sea  $T$  un operador  $m$ -sublineal definido en una clase densa,  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^m$ . Supongamos que para toda  $m$ -upla de pesos  $(w_1, \dots, w_m)$  tal que  $w_j^{-1} \in A_1$  (para todo  $j$ ) tenemos:

$$|T(f_1, \dots, f_m)w_1 \dots w_m|_\infty \leq C \prod_{j=1}^m |f_j w_j|_\infty,$$

entonces para toda  $m$ -upla de índices

$$|T(f_1, \dots, f_m)|_{p, w_1^{p_1} \dots w_m^{p_m}} \leq C \prod_{j=1}^m |f_j|_{p_j, w_j^{p_j}}.$$

Usando este teorema se puede dar otra prueba para esta subclase de pesos para la acotación de operadores multilineales de Calderón-Zygmund. (Para el resultado general ver [LOPTTG].)

[GM] L. Grafakos, J.M. Martell. *Extrapolation of weighted norm inequalities for multivariable operators and applications*. J. Geom. Anal. 14 (2004), no. 1 19-46.

[HMS] E. Harboure, R. Macías, C. Segovia. *Extrapolation results for classes of weights* American Journal of Mathematics (110) (1988), 383-397.

[LOPTTG] A. Lerner, S. Ombrosi, C. Pérez, R. Torres, R. Trujillo-González. *New maximal functions, and multiple weights for multilinear Calderón-Zygmund theory*. Adv. Math. 220 (2009), no. 4, 1222-1264.

**Conferencia Invitada**

**Liliana Forzani**

**Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, en Santa Fe**

---

Análisis Real asociado a funciones convexas y regularidad de soluciones de la ecuación de Monge-Ampere

En los 90, Caffarelli introduce un enfoque geométrico al estudio de las soluciones convexas de la ecuación  $\det D^2\phi = \mu$ , cuando la medida  $\mu$  satisface una condición de duplicación. En esta charla mencionaré algo del análisis real asociado a estas ecuaciones como así también cómo este análisis real permite entender aspectos relacionados a la regularidad de esta ecuación. Esto es parte de trabajos en colaboración con Hugo Aimar, Diego Maldonado y Ricardo Toledano.

---

**Autores: Bruno Bongioanni, Adrián Cabral, Aníbal Chicco Ruiz**

**Lugar: IMAL, Santa Fe**

**Expositor: Adrián Cabral**

---

Acotaciones en el espacio de Lebesgue extremo de la integral fraccionaria asociada al semi-grupo de Laguerre

Para  $\alpha > -\frac{1}{2}$  se define el operador de Laguerre

$$L_\alpha = \frac{1}{4} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right), \quad x > 0,$$

con autofunciones

$$\varphi_n^\alpha(x) = \left( \frac{2n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \right)^{1/2} L_n^\alpha(x^2) e^{-x^2/2} x^{\alpha + \frac{1}{2}},$$

donde  $L_n^\alpha$  es el polinomio de Laguerre de grado  $n$ .

En este contexto, encontramos acotaciones del operador integral fraccionaria

$$L_\alpha^{-\sigma} f = \int_0^\infty e^{-tL_\alpha} f t^\sigma \frac{dt}{t},$$

en el espacio de Lebesgue extremo  $L^p$  con  $p = \frac{1}{2\sigma}$ . Si bien no hay acotación a  $L^\infty$ , el espacio de llegada resulta un espacio de tipo  $BMO$ , dual de un espacio de tipo Hardy definido previamente en [3]. Estas acotaciones se obtienen por medio de estimaciones para el núcleo del operador  $e^{-tL_\alpha}$  usadas [2].

---

Por otro lado, buscamos estimaciones más allá del extremo  $L^{\frac{1}{2\sigma}}$ , en espacios Liptchitz  $BMO_\beta$  al estilo de [1].

Bongioanni, B. ; Harboure, E. ; Salinas, O. Weighted inequalities for negative powers of Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.* 348 (2008), no. 1, 12–27.

Chicco Ruiz, Anibal; Harboure, Eleonor. Weighted norm inequalities for heat-diffusion Laguerre's semigroups. *Math. Z.* 257 (2007), no. 2, 329–354.

Dziubański, Jacek . Hardy spaces for Laguerre expansions. *Constr. Approx.* 27 (2008), no. 3, 269–287.

---

**Autores:** Pablo L. De Nápoli, Irene Drelichman, Ricardo G. Durán

**Lugar:** Buenos Aires

**Expositor:** Irene Drelichman

---

Desigualdades con pesos para la integral fraccionaria de funciones radiales

Las desigualdades con pesos potencias para la integral fraccionaria

$$(T_\gamma v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(y)}{|x-y|^\gamma} dy, \quad 0 < \gamma < n$$

(también llamadas desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev con pesos) se remontan al trabajo [2] de G. H. Hardy and J. E. Littlewood en el caso unidimensional, y fueron generalizadas a  $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ , por E. M. Stein and G. Weiss en [3], donde se prueba la siguiente estimación:

Sean  $n \geq 1, 0 < \gamma\beta < \frac{n}{q}, \alpha + \beta \geq 0, \gamma \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma + \alpha + \beta}{n} - 1$ . Si  $p \leq q < \infty$ , entonces la desigualdad

$$\| |x|^{-\beta} T_\gamma v \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \| |x|^\alpha v \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

vale para cualquier  $v \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{p\alpha} dx)$ , donde  $C$  es una constante independiente de  $v$ .

Si bien esta desigualdad es óptima para funciones en general, en [1] probamos que si nos restringimos a funciones con simetría radial es posible obtener un rango más amplio de exponentes para los que sigue valiendo. Más concretamente, la condición  $\alpha + \beta \geq 0$  del teorema anterior puede ser reemplazada por  $\alpha + \beta \geq (n-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$  (en el caso  $p = 1$  el teorema también se puede probar siempre que valga la desigualdad estricta).

En esta charla daremos algunas ideas de la demostración de nuestro resultado y comentaremos algunas aplicaciones.

P. L. De Nápoli, I. Drelichman, R. G. Durán. *On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions*, por aparecer en Illinois J. Math.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some Properties of Fractional Integrals, I*, Math. Z., 27 (1928), 565–606.

E. M. Stein, G. Weiss, *Fractional integrals on  $n$ -dimensional Euclidean space*, J. Math. Mech. 7 (1958), 503–514.

---

**Autores: Pablo L. De Nápoli, Ricardo G. Durán e Irene Drelichman**

**Lugar: Universidad de Buenos Aires, FCEyN**

**Expositor: Pablo L. De Nápoli**

---

Multiplicadores dados por una transformada de Laplace para desarrollos en funciones de Laguerre

Consideramos los espacios  $L^p$  con pesos:  $L^p_{v(\gamma)} = L^p(\mathbb{R}_+, x^\gamma dx)$  donde  $\gamma > -1$ , y las funciones de Laguerre:  $l_k^\alpha(x) = \left(\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\right)^{1/2} e^{-x/2} L_k^\alpha(x)$  donde  $L_k^\alpha(x)$  denota a los polinomios ortogonales de Laguerre ( $\alpha > -1, k \in \mathbb{N}_0$ ). Este sistema es una base ortonormal en  $L^2(\mathbb{R}_+, x^\alpha dx)$  y para  $\gamma$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{\alpha,k}(f) l_k^\alpha(x), \quad a_{\alpha,k}(f) = \int_0^{\infty} f(x) l_k^\alpha(x) x^\alpha dx$$

Si  $m = (m_k)$  es una sucesión acotada, podemos asociarle un operador multiplicador  $M_{\alpha,m}$  in  $L^2(\mathbb{R}_+, x^\alpha dx)$  definido por

$$M_{\alpha,m}f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{\alpha,k}(f) m_k l_k^\alpha(x)$$

Decimos que  $M_{\alpha,m}$  es un multiplicador dado por una transformada de Laplace si  $m_k = m(k)$  donde la función  $m$  está dada por una transformada de Laplace-Stieljtes  $m(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\psi(t)$  para cierta función  $\psi \in BV(\mathbb{R})$ .

**Teorema:** Supongamos que existen  $\delta > 0$  y  $C > 0$  tales que  $|\psi(t) - \psi(0)| \leq Ct^\sigma$  para  $0 < t \leq \delta$  donde  $0 < \sigma < \alpha + 1$ . Supongamos además que  $1 < p \leq q < \infty$ ,  $a < \frac{\alpha+1}{p'}$ ,  $b < \frac{\alpha+1}{q}$ ,  $2a + 2b > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)(2\alpha + 1)$  y que  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} -$

$\frac{\sigma-a-b}{\alpha+1}$ . Entonces  $M_{\alpha,m}$  puede extenderse a un operador acotado de  $L^p_{v(\alpha+ap)}$  en  $L^q_{v(\alpha-bq)}$  y tenemos la acotación con pesos

$$\|M_{\alpha,m}f\|_{L^q_{v(\alpha-bq)}} \leq C\|f\|_{L^p_{v(\alpha+ap)}}$$

Un ejemplo importante al cual nuestro teorema es aplicable es el de la integral fraccionaria asociada a los desarrollos de Laguerre. Nuestro trabajo generaliza y simplifica el método de [1] (si  $\alpha > -\frac{1}{2}$ ), a la vez que obtenemos una nueva demostración de los resultados de [2]. Para obtener el resultado en el rango  $-1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}$  utilizamos un teorema de transplante.

G. Gasper, K. Stempak, W. Trebels. *Fractional integration for Laguerre expansions*. Methods Appl Anal . 2 (1995), 67-75.

G. Gasper, W. Trebels. *Norm inequalities for fractional integrals of Laguerre and Hermite expansions*. Tohoku Math. J. (2) Vol. 52, No. 2 (2000), 251-260.

---

**Autores: Marcela Sanmartino y Marisa Toschi**

**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**

**Expositor: Marisa Toschi**

---

Sobre operadores elípticos singulares no esencialmente autoadjuntos y propagación de ondas

En [1] los autores analizan el buen planteo del problema de Cauchy para la propagación de ondas en algunos espacios tiempos estáticos con singularidades desnudas.

Motivados por esto caracterizan cuando el problema de Cauchy  $\partial_{tt}u = Au$  en  $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  está bien planteado aún cuando el operador elíptico no es esencialmente autoadjunto y no hay condiciones de borde.

En este trabajo generalizamos los resultados allí obtenidos para operadores de la forma

$$A = -\frac{1}{m} \operatorname{div} M \nabla$$

en  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio acotado y regular.

R.E. Gamboa Saravi, M. Sanmartino and P. Tchamitchian. *An alternative well-posedness property and static spacetimes with naked singularities*. Submitted for publication. arXiv:0910.5439v1

## Aplicaciones de la Matemática

*Organizan:*

*Elvio Pilotta y Lisandro Parente*



**Conferencia Invitada**

**Pedro Morin**

**Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - Universidad Nacional del Litoral - CONICET**

---

Un método de elementos finitos adaptativo para problemas de optimización de forma

Consideramos problemas de optimización de forma en el contexto de programación cuadrática secuencial *inexacta*. La *inexactitud* proviene de utilizar elementos finitos para aproximar la ecuación de estado, calcular el funcional geométrico, y utilizar polígonos/poliedros para aproximar las formas suaves. Presentaremos un algoritmo novedoso que equidistribuye los errores producidos por la aproximación del funcional de forma y la discretización de la ecuación de estado y la geometría. Los experimentos numéricos muestran, que como se espera, el método utiliza bajas resoluciones al principio, y aumenta la resolución a medida que nos acercamos a la forma óptima, haciendo un uso eficiente de los recursos computacionales.

---

**Autores: Carmen Calzada Canalejo, María Emilia Castillo, Enrique Fernández-Cara, Mercedes Marín Beltrán**

**Lugar: IMAL-Santa Fe**

**Expositor: María Emilia Castillo**

---

Control orientado a terapia de un modelo diferencial ordinario de crecimiento tumoral

Consideramos el problema de optimizar el protocolo de administración de una droga anticancerígena (quimioterapia citotóxica) durante un periodo dado de tratamiento, aplicada en intervalos de tiempo prefijados.

Hemos estudiado varios modelos diferenciales ordinarios de gran aceptación, debidos principalmente a R.B. Martin e Y. Liang, cuyas variables principales son el número de células tumorales  $N$  y la concentración del medicamento  $v$  (funciones de la variable temporal  $t$ ). El objetivo es minimizar  $N(T_f)$ , donde  $T_f$  es el instante final, bajo ciertas restricciones ligadas a la toxicidad del medicamento. Presentamos experiencias numéricas obtenidas con software de optimización variado (paquetes NOMAD y CONDOR).

**Autores:** Agnelli J.P.\*, Padra C\*\*. y Turner C.V.\*

**Lugar:** \* FaMAF, Universidad nacional de Córdoba y CIEM, CONICET – \*\*  
Centro Atómico Bariloche y CONICET

**Expositor:** Agnelli J.P.

---

#### Localización de tumores mediante Optimización de Formas

En el diagnóstico por medio de imágenes térmicas, se utilizan tecnologías capaces de medir la radiación infrarroja emitida por un cuerpo y así obtener información sobre cualquier cambio de temperatura que exista en su superficie. Se ha determinado [1] que la presencia de un tumor, por ejemplo tumor de mamas o melanoma de piel, produce un incremento de la temperatura en las zonas que lo rodean y en la superficie corporal.

En este trabajo presentamos una metodología para estimar parámetros geométricos desconocidos asociados a un tumor, utilizando como dato mediciones de temperatura corporal en las zonas próximas al tumor. Para esto, definimos un funcional que representa la diferencia entre un perfil temperatura corporal medida experimentalmente, por ejemplo mediante termografía, y la solución de un problema transferencia de calor [2]. Por lo tanto, este funcional se relaciona con los parámetros geométricos a través de la solución del problema de transferencia de calor, de manera tal que encontrar el mínimo del funcional lleva a encontrar los parámetros geométricos desconocidos asociados al tumor. Para resolver el problema de optimización se implementó un método de gradiente espectral y para el cálculo del gradiente del funcional se utilizaron herramientas correspondientes a la teoría del análisis de sensibilidad, particularmente el cálculo de la derivada de forma [3].

[1] **Santa Cruz G.A., González S.J., et al.** Dynamic infrared imaging of cutaneous melanoma and normal skin in patients treated with BNCT. *Appl. Radiat. Isotopes*, vol. 67, pp s54-s58, 2009.

[2] **Agnelli J.P, Barrea A.A. and Turner C.V.** Tumor location and parameter estimation by thermography. *Mathematical and Computer Modelling*. In press, 2010.

[3] **Haslinger J., and Makinen R.A.E.** Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation and Computation. SIAM, ISBN 0-89871-536-9. 2003.

**Autores:** Damián Knopoff, Germán Torres, Cristina Turner  
**Lugar:** FaMAF - Univ. Nacional de Córdoba  
**Expositor:** Damián Knopoff

---

### Modelo matemático para el crecimiento tumoral con quimioterapia

En este trabajo mostraremos un modelo matemático para el crecimiento de tumores con quimioterapia. Dicho modelo está planteado como un problema de frontera libre, constituida por el borde del tumor, siendo el dominio el propio tumor. Se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para el número de células tumorales ( $n$ ), la concentración de nutrientes ( $c$ ), la velocidad del flujo de células ( $v$ ) y la concentración de droga ( $w$ ). Se asume un tumor esférico, con simetría radial, con lo cual nuestras variables independientes son el radio  $r$  y el tiempo  $t$ .

Las ecuaciones involucradas en el modelo son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v n)}{\partial r} &= f_1(n, c, w) \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v c)}{\partial r} - \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) &= f_2(n, c, w) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} &= f_3(c, n, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v w)}{\partial r} - \frac{D_w}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= f_4(n, c, w)\end{aligned}$$

donde  $S(t)$  es la frontera libre y las  $f_i$  son funciones que se derivan de cuestiones de cinética química y biológica.

Las condiciones iniciales son:  $n(r, 0) = n_i(r)$ ,  $c(r, 0) = c_i(r)$ ,  $S(0) = S_i$  y  $w(r, 0) = 0$ . Asimismo, las condiciones de borde son, en  $r = 0$ ,  $\frac{\partial c}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$  y  $v = 0$ . En tanto que en la frontera libre  $S(t)$  se tiene  $\frac{dS(t)}{dt} = v(S(t), t)$ ,  $c = c_0(t)$  y  $w = w_0(t)$ .

Es importante recalcar que en este modelo hay incluidos parámetros que se obtienen de datos experimentales. Para poder resolver numéricamente el sistema de EDP's se realizan algunas suposiciones en base a los mismos.

Mostraremos algunas de las simulaciones numéricas obtenidas, las cuales nos permiten analizar la capacidad del modelo para representar los fenómenos biológicos involucrados.

En un futuro se usará este modelo para poder estimar los parámetros biológicos más convenientes, vía resolución del problema inverso.

- J.P. Ward, J.R. King, Mathematical modelling of avascular tumour growth, IMA J. Math. Appl. Med. Biol. 14 (1997) 39.
- J.P. Ward, J.R. King, Mathematical modelling of drug transport in tumour multicell spheroids and monolayer cultures, Math. Biosciences 181 (2003) 177-207.
- C. Turner, A. Barrea, A numerical analysis of a model for growth tumor, Applied Mathematics and Computation, 167 (2005), 345-354.

---

**Autores: Andrés Barrea - Matías Hernández**

**Lugar: UNC - Famaf - CIEM**

**Expositor: Matías Hernández**

---

### Tratamiento óptimo de quimioterapia

La quimioterapia es un tratamiento contra el cáncer basado en la administración de drogas. Generalmente estos fármacos son suministrados al paciente siguiendo un programa consistente de  $n$  dosis en tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . En el caso de tratamientos multi-drogas, cada dosis es un cóctel de  $d$  drogas con niveles de concentración  $C_{ij}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, d\}$  en el plasma sanguíneo. Los conjuntos de restricciones de un tratamiento de quimioterapia varían de droga a droga así como con el tipo de cáncer. Pero estos tienen la siguiente forma general.

1. *Máxima dosis instantánea*

$$g_1(\mathbf{C}) = \{C_{max_j} - C_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, d\}\}$$

2. *Máxima dosis acumulada*

$$g_2(\mathbf{C}) = \{C_{cum_j} - \sum_{i=1}^n C_{ij} \geq 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, d\}\}$$

3. *Medida máxima del tumor*

$$g_3(\mathbf{C}) = \{N_{max} - N(b_i) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

4. *Restricción de los efectos tóxicos*

$$g_4(\mathbf{C}) = \{C_{sc_k} - \sum_{j=1}^d \eta_{kj} C_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, d\}\}$$

Los factores  $\eta_{kj}$  que aparecen en las restricciones indican el riesgo de daño sobre el órgano o tejido  $k$  por la droga  $j$ . El modelo elegido para describir la

respuesta del tumor al tratamiento es dado por

$$\frac{dN}{dt} = N(t) \left[ \lambda \ln\left(\frac{\theta}{N(t)}\right) - \sum_{j=1}^d \kappa_j \sum_{i=1}^n C_{ij} \{H(t - t_i) - H(t - t_{i+1})\} \right]$$

donde  $N(t)$  representa el número de células en el tumor. La eradicación del tumor, puede formularse como sigue:

$$\max_{\mathbf{C}} f_1(\mathbf{C}) = \int_{t_1}^{t_n} \ln\left(\frac{\theta}{N(\tau)}\right) d\tau$$

El segundo objetivo consiste en prolongar el tiempo de sobrevida del paciente, denotando por  $T$  este tiempo, se tiene que el segundo objetivo adopta la forma

$$\max_{\mathbf{C}} f_2(\mathbf{C}) = \int_{t_1}^T \tau d\tau = T$$

En general este tipo de problemas se resuelve con métodos heurísticos, en este trabajo formulamos el problema como un problema de programación no lineal multiobjetivo resuelto a través del método de minimax; permitiendo incerteza en los variables y en la restricciones.

---

**Autores:** Juan Fuxman Bass, Abdul Salam Jarrah, Mercedes Pérez Millán  
**Lugar:** Universidad de Buenos Aires, American University in Sharjah.  
**Expositor:** Mercedes Pérez Millán

---

Un modelo discreto de la red regulatoria del factor nuclear NF- $\kappa$ B

En este trabajo desarrollamos un modelo de la red regulatoria de la vía de transducción de señales del factor nuclear  $\kappa$ B (NF- $\kappa$ B) a través de un sistema dinámico discreto. Las proteínas del grupo NF- $\kappa$ B son un conjunto de factores de transcripción involucradas en importantes procesos celulares que incluyen respuestas inflamatorias así como también la regulación de la apoptosis. El modelo desarrollado logró reproducir una gran diversidad de resultados experimentales así como también predicciones arrojadas por modelos basados en ecuaciones diferenciales [Hoffmann *et ál.* (2002), Lee *et ál.* (2000), Lipniacki *et ál.* (2004), Yue *et ál.* (2006), etc.], sin la necesidad de determinar decenas de constantes cinéticas experimentalmente o mediante aproximaciones [Kearns y Hoffmann (2009)].

El modelo presentado contribuye a comprender la regulación de la vía de NF- $\kappa$ B y permite explorar su potencial terapéutico como blanco para drogas en enfermedades inflamatorias crónicas, cáncer, infecciones y quimioterapia entre otros.

---

**Autores: Adriana Saavedra, Cecilia Perez y Mariano Ferrari**  
**Lugar: Facultad de Ingeniería, U. N. de la Patagonia S. J. B.**  
**Expositor: Mariano Ferrari**

---

Sistemas homogéneos y monótonos - Modelos poblacionales con dos sexos  
Estudiamos algunos sistemas dinámicos autónomos en  $(\mathbb{R}^+)^n$  inspirados en la dinámica de poblaciones con dos sexos. Tanto en el caso de tiempo discreto:

$$x(t) = f(x(t-1)),$$

como continuo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Donde  $f$  es un operador homogéneo de grado 1 ( $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ) y monótono ( $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ , para todos  $x, y \in (\mathbb{R}^+)^n$ ).

En el caso discreto estudiamos las consecuencias y aplicaciones del Teorema de Perron-Frobenius generalizado (Gaubert y Gunawardena 2003) y su relación con otros resultados acerca de la existencia y unicidad de autovectores (Nussbaum 1986), que corresponden a estructuras de equilibrio del sistema.

En el caso continuo generalizamos un modelo poblacional de dos sexos con uniones duraderas (Hadeler 1988) incorporando un estadio pre reproductivo.

1. Gaubert, S. y J. Gunawardena. 2003. The Perron-Frobenius theorem for homogeneous, monotone functions. *Transactions of the American Mathematical Society* 356: 4931-4950.
2. Hadeler, K. P., R. Waldstatter, y A. Worz-Busekros. 1988. Models for pair formation in bisexual populations. *Journal of Mathematical Biology* 26: 635-649.
3. Nussbaum, R. D. 1986. Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra and its Applications* 73: 59-122.

**Autores:** Juan Carlos Rosales, Hyun Mo Yang, Jorge Eduardo Garzón  
**Lugar:** Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta. Lab-EPIFISMA IMECC, Universidade Estadual de Campinas  
**Expositor:** Juan Carlos Rosales

---

Cálculo del Número Reproductivo Básico como Autovalor Dominante del Operador Próxima Generación para el Ciclo Silvestre de Transmisión de la Leishmaniasis Tegumentar Americana

A partir de un modelo con ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, se describe cualitativamente la dinámica del ciclo silvestre de la Leishmaniasis Tegumentar Americana. Se obtiene la expresión para el Número Reproductivo Básico como el autovalor dominante del Operador Próxima Generación. El modelo considera  $n$  reservorios silvestres. Además se introduce un refinamiento en el modelo, en la tasa de nacimiento del vector, para contemplar las influencias de las fluctuaciones climáticas estacionales, en la densidad de poblacional de la especie vector, *Lutzomyia*, mediante funciones senoidales. Estas oscilaciones, buscando las frecuencias a partir de los datos, realizando extracciones de tendencia lineal y ajustes en la base  $\{1, t, \cos \frac{2\pi t}{f}, \sin \frac{2\pi t}{f}\}$ , permitirían describir cualitativamente la situación epidémica para cada año en particular en la localidad de Hipólito Yrigoyen, en el Departamento de Orán de la provincia de Salta.

Se presentan aproximaciones numéricas que proporciona el mismo, aplicado a posibles situaciones particulares, cuando el ciclo de transmisión puede considerarse silvestre y peridoméstico, según los casos ocurridos en la localidad mencionada.

**Autores:** Andrés Barrea  
**Lugar:** UNC - Famaf - CIEM  
**Expositor:** Andrés Barrea

---

#### Incentivos para la investigación interdisciplinaria

Existe buena cantidad de evidencia de que la ciencia a nivel global se encamina hacia la interdisciplina. Uno de los principales motivos es el valor social de la misma, es decir los problemas concretos a resolver requieren de conocimientos de diferentes áreas. El esfuerzo de los investigadores para desarrollar esta tarea supone una disminución en su nivel de especialización y por ende una pérdida de la calidad de la investigación tanto en las disciplinas puras como en las interdisciplinarias. En la literatura se puede encontrar modelos estáticos de esta situación. En este trabajo se modela como un problema de control óptimo de horizonte infinito el posible incentivo a la investigación interdisciplinaria. Las variables de estado consideradas son las  $q_j(t)$  que representan la producción de conocimiento tanto especializado como interdisciplinario, las cuales cumplen un sistema de ecuaciones ordinarias con parámetros de crecimiento. Las variables de control son los  $u_j(t)$  los incentivos para cada tipo de conocimiento, estamos pensando en subsidios, becas, etc. El objetivo a maximizar en este modelo son la calidad de la producción, pensada como una función creciente de los  $q_j$  y el valor social de cada tipo de conocimiento; ambos objetivos cumpliendo restricciones razonables y parametrizadas para permitir el análisis en diferentes escenarios. Se presentan resultados tanto analíticos como numéricos del modelo propuesto.

---

#### Conferencia Invitada

**Karina Temperini**

**Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL) - CONICET, Universidad Nacional del Litoral (UNL)**

---

#### Saturación global para métodos de regularización espectrales con calificación óptima

En 1994, A. Neubauer ([4]) demostró que ciertos métodos de regularización espectrales para problemas inversos mal condicionados “saturan”, es decir, a partir del conocimiento de un cierto grado de regularidad acerca de la solución exacta del problema, son incapaces de continuar extrayendo información

sobre la misma, independientemente de las hipótesis adicionales que se conozcan o se impongan. El concepto de “saturación” está asociado al mejor orden de convergencia del error total que un método puede alcanzar independientemente de los supuestos de regularidad sobre la solución exacta y de la selección de la regla de elección de parámetros. En 2010, Herdman, Spies y Temperini ([1]) desarrollaron una teoría general de saturación global para métodos de regularización arbitrarios, dentro de la cual fue posible definir adecuadamente el concepto de saturación de un método de regularización formalizando la idea original e intuitiva del mismo.

Relacionado de una manera dual al concepto de saturación está el concepto de calificación de un método de regularización espectral, el cual fue introducido por Mathé y Pereverzev en el año 2003 ([3]). Este concepto está fuertemente asociado al orden de convergencia óptimo del error de regularización bajo ciertos supuestos “a-priori” acerca de la solución exacta. En 2009, Herdman, Spies y Temperini ([2]) generalizaron el concepto de calificación e introdujeron tres niveles jerárquicos del mismo: débil, fuerte y óptima. Se mostró que la calificación débil generaliza la definición de calificación introducida en [3].

En este trabajo se presentarán resultados recíprocos de métodos de regularización espectrales con calificación óptima, en los que propiedades de regularidad de las soluciones pueden deducirse a partir del orden de convergencia del método. Asimismo se caracterizará la saturación global de métodos de regularización espectrales que poseen calificación óptima y se mostrarán diversos ejemplos de tales métodos.

[1] Herdman, T.; Spies, R. D. and Temperini, K. G.; Global Saturation of Regularization Methods for Inverse Ill-Posed Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, aceptado para su publicación.

[2] Herdman, T.; Spies, R. D. and Temperini, K. G.; Generalized Qualification and Qualification Levels for Spectral Regularization Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 141:547–567, 2009.

[3] Mathé, P. and Pereverzev, S. V.; Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales. *Inverse Problems*, 19(3):789–803, 2003.

[4] Neubauer, A.; On converse and saturation results for regularization methods. In *Beiträge zur angewandten Analysis und Informatik*, 262–270. Shaker, Aachen, 1994.

**Autores:** Gisela Mazzeri, Rubén Spies y Karina Temperini

**Lugar:** Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL) - CONICET, Universidad Nacional del Litoral (UNL)

**Expositor:** Gisela Mazzeri

---

Convergencia radial de regularizaciones de tipo Tikhonov-Phillips con combinaciones lineales de seminormas generadas por operadores diferenciales

En el estudio de problemas inversos mal condicionados es bien sabido que los métodos clásicos de regularización poseen la restricción de no admitir soluciones discontinuas o no regulares en general. En algunos casos (particularmente en ciertas aplicaciones a restauración de imágenes), este tipo de restricción suele ser muy indeseable, puesto que las soluciones aproximadas pierden información significativa en regiones donde la solución exacta no es regular. En estos casos es deseable el diseño de estrategias que conduzcan a métodos de regularización que permitan que las correspondientes soluciones aproximadas sean no regulares. En el contexto de la teoría general de los métodos de Tikhonov-Phillips, la utilización de penalizantes basados en esta estrategia da lugar a los llamados Métodos de regularización de Tikhonov-Phillips generalizados ([1]). En este trabajo se consideran regularizaciones obtenidas utilizando como penalizantes, combinaciones lineales de seminormas generadas por operadores diferenciales. Se demuestra la convergencia de estas soluciones regularizadas en el caso de reglas de elección de parámetro vectoriales radiales y se caracteriza la solución de mínimos cuadrados límite. Finalmente, se presentarán algunos ejemplos numéricos de problemas relacionados con el procesamiento y restauración de imágenes digitales con el objetivo de mostrar la potencialidad de los métodos desarrollados en aplicaciones concretas.

[1] Engl, H. W.; Hanke, M. and Neubauer, A.; Regularization of inverse problems, volume 375 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996

**Autores:** María Beatriz Pintarelli, Fernando Vericat  
**Lugar:** Departamento de Ciencias Básicas-Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas- UNLP  
**Expositor:** María Beatriz Pintarelli

---

Una ecuación en derivadas parciales como un problema de momentos bidimensional

Muchos problemas inversos pueden ser formulados como un problema de momentos. Consideramos aquí el problema de hallar una función  $F(t, x)$  tal que

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -G(t) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

con las condiciones de contorno

$$F(t, 0) = \frac{B(t)}{G(t)} \quad F(0, x) = F_{inicial}(x)$$

Se presentará este problema como un problema de momentos bidimensional generalizado. Se acotará el error de la solución regularizada utilizando las técnicas sobre problema de momentos bidimensional generalizado en  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ .

---

**Autores:** Mariel Rosenblatt, Eduardo Serrano y Alejandra Figliola  
**Lugar:** Universidad Nacional de Gral. Sarmiento y Universidad Nacional de San Martín  
**Expositor:** Mariel Rosenblatt

---

Una Entropía Local basada en Wavelet Leaders

En este trabajo introducimos una nueva medida de la información que proporciona una señal. Combinando el concepto de entropía, proveniente de la teoría de la información y de la mecánica estadística, con los coeficientes wavelet leaders definimos la 'Entropía Wavelet Leaders Local' y analizamos la relación que existe entre esta medida y la regularidad local de la señal.

Diversos cuantificadores han sido propuestos para medir la regularidad local de una función. El más simple es el exponente Hölder puntual, que se define en cada  $x_0 \in \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ , donde  $f$  es una función localmente acotada, como

$$H_f(x_0) = \sup_{0 \leq \alpha < +\infty} \{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}$$

La función  $f$  está en la clase  $C^\alpha(x_0)$  si existen  $C > 0$  y un polinomio  $P_{x_0}(x)$  de grado menor que  $\alpha$  tales que:  $|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha$ . Los coeficientes wavelet leaders, introducidos por S. Jaffard, se calculan a partir de los supremos locales de los coeficientes wavelet de una señal  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , concentrando su información y reorganizando su estructura. En 2004, S. Jaffard formuló una nueva caracterización del exponente Hölder puntual a través del estudio del decaimiento de estos coeficientes.

A partir del cálculo de los coeficientes wavelet leaders de una señal de  $2^N$  datos, construimos, localmente, una distribución de probabilidades discreta  $P = \{\rho_j : j = 1, \dots, N\}$  y usando la entropía de Shannon definimos la Entropía Wavelet Leaders Local,

$$S(P) = - \sum_{j=1}^N \rho_j \log_2(\rho_j)$$

asociada a un intervalo temporal de cualquier tamaño.

Además mostramos una aplicación en señales naturales, comparando la evolución temporal de la Entropía Wavelet Leaders Local y del exponente Hölder puntual.

Cover, T.M.; Thomas, J.A. *Elements of Information Theory, 2nd Edition*. J. Wiley; New York, 2006.

Jaffard, S. Wavelet techniques in multifractal analysis. *Proc. Sympos. Pure Math., AMS* **2004**, *72*, 2, 91-151.

Mallat, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing, The S parse Way, 3rd Edition*. Academic Press; Burlington, 2009.

---

**Autores: Ricardo Grossi, Virginia Quintana, Antonio SÁngari**

**Lugar: Universidad Nacional de Salta**

**Expositor: Antonio SÁngari**

---

#### Soluciones débiles de vigas con discontinuidades intermedias mediante el uso de la teoría de Timoshenko

Al analizar el planteo y la resolución del problema de contorno y autovalores que describe el comportamiento dinámico de vigas con discontinuidades en puntos intermedios, tales como rótulas y restricciones elásticas, surge que el mismo carece de solución clásica, debiéndose determinar una solución débil. La presencia de una rótula y de restricciones elásticas en un punto intermedio genera condiciones cuyas expresiones analíticas son totalmente análogas a las

de las condiciones de contorno. No obstante, el punto intermedio estudiado es un punto interior del dominio y por lo tanto las expresiones analíticas que proporciona el cálculo de variaciones, deben ser consideradas como condiciones de transición. En este trabajo se obtienen, mediante la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, los problemas de contorno y autovalores que describen el comportamiento dinámico de las vigas mencionadas haciendo uso de la teoría de Timoshenko, la cual considera los efectos de las deformaciones por corte y de la inercia rotatoria dentro de la teoría clásica de Euler-Bernoulli. Luego, se determinan las soluciones débiles, en los espacios de Sobolev correspondientes y se analizan las ventajas de esas soluciones en las formulaciones correspondientes y su repercusión en la determinación de valores numéricos. Además se presentan valores de los coeficientes de frecuencias de vibración y se muestran las formas modales respectivas mediante un tratamiento moderno del método de Ritz-Galerkin para obtener los autovalores aproximados.

---

**Autores:** Claudia Denner, Ana Rosso, Juan Cesco, Jorge Pérez, Oscar Taurian  
**Lugar:** Universidad Nacional de Río Cuarto  
**Expositor:** Claudia Denner

---

El uso de funciones de Laguerre en la aproximación de ciertas integrales multicéntricas

El cálculo de la energía potencial de interacción de Coulomb electrón-núcleo  $V(\vec{R})$ , usando una base de funciones compuesta por orbitales 1s de Slater (STO) y 1s gaussianos (GTO), tiene la expresión

$$V(\vec{R}) = \kappa \int_0^\infty f(w) j_0(w) dw$$

donde  $j_0(w) = \frac{\text{sen}(w)}{w}$  es la función esférica de Bessel de orden cero.

En este trabajo se presenta una aproximación a la energía potencial desarrollando la parte no oscilatoria del integrando,  $f(w)$ , por una suma finita de combinaciones lineales de funciones ortogonales de Laguerre ( $\mathcal{L}_k(w)$ ), es decir:

$$f(w) \simeq \sum_{k=0}^N c_k \mathcal{L}_k(w)$$

con

$$c_k = \int_0^{\infty} f(w) \mathcal{L}_k(w) dw$$

y

$$\mathcal{L}_k(w) = e^{-w} P_k(w)$$

donde  $P_k(w)$  son los polinomios ortogonales de Laguerre.

Con esta aproximación se simplifica el cálculo de la energía potencial ya que:

$$V(\vec{R}) \simeq \sum_{k=0}^N c_k \int_0^{\infty} \mathcal{L}_k(w) j_0(w) dw$$

donde

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}_k(w) j_0(w) dw$$

pueden calcularse de manera exacta. Se estudia el comportamiento del error relativo que provee la aproximación con el fin de buscar estrategias de truncamiento en el desarrollo de  $f(w)$ .

---

#### Conferencia Invitada

Ma. Cristina Sanziel

Fac.Cs.Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR

---

#### Tratamiento Numérico de un Problema de Transferencia de Calor y Masa

Se proponen diferentes abordajes numéricos para calcular los valores de la solución aproximada de un problema de transferencia de calor y masa con cambio de fase, en un medio poroso.

Luikov [1-2] estableció la formulación matemática del problema físico, en tanto que en [3] se realiza un análisis matemático teórico que permite demostrar la existencia de solución única local en el tiempo.

En el presente trabajo se aplican tres diferentes métodos numéricos: aproximación de punto fijo, diferencias finitas con paso temporal variable y método cuasi-estacionario, a fin de encontrar la solución aproximada del problema, es decir se encuentran valores de la temperatura, la humedad y la frontera libre, y se comparan los resultados obtenidos.

[1] A.V. Luikov, Heat and Mass Transfer in Capillary-porous bodies, Pergamon Press, Oxford, 1966.

[2] A.V. Luikov, Heat and Mass Transfer, MIR Publishers, Moscow, 1978

[3] E. Santillan Marcus, A. Briozzo, On freezing of a finite humid porous medium with a heat flux condition, *Nonlinear Analysis* 67 (2007) 1919-1937.

---

**Autores:** E.M. Mancinelli, E.A. Santillán Marcus  
**Lugar:** FCEIA - Universidad Nacional de Rosario  
**Expositor:** E.M. Mancinelli

---

#### Control óptimo de la frontera libre en un proceso de desublimación

Se estudia un proceso de desublimación de humedad en un medio poroso finito a través de un enfoque analítico. Este proceso se describe como un problema acoplado de Stefan a dos fases en donde se controla la evolución de la frontera libre usando condiciones de temperatura. Se minimiza un funcional de costo apropiado.

---

**Autores:** Eugenio Della Vecchia, Silvia Di Marco, Alain Jean-Marie (\*)  
**Lugar:** CONICET-UNR, Argentina; (\*) INRIA-LIRMM, Francia  
**Expositor:** Eugenio Della Vecchia

---

#### Relaciones entre iteración de valores y horizonte móvil en problemas de control óptimo estocástico

Consideramos un sistema dinámico que evoluciona según un proceso de Markov, entre un número finito de estados y con un número finitos de acciones disponibles en cada estado. Las políticas reusultantes son evaluadas a través del criterio de ganancia promedio.

Cuando se consideran problemas de horizonte finito, el principio de la programación dinámica da un mecanismo recursivo para calcular la mejor estrategia. Esto no puede ser aplicado cuando el horizonte temporal es no acotado y el cálculo de la política óptima puede ser una tarea difícil, sobre todo por el tamaño de los problemas que provienen de las aplicaciones.

Por ello los métodos de aproximación cobran vital importancia, entre ellos el procedimiento de *horizonte móvil*, muy utilizado en las aplicaciones. El mismo es un método heurístico que da una política estacionaria óptima cuya ganancia es cercana a la óptima. Uno de nuestros objetivos es analizar la convergencia del método, dar condiciones sobre los datos del problema

bajo los cuales el procedimiento dé políticas cercanas a las óptimas y ofrecer una cota para el error.

Cuando el método utiliza el algoritmo de iteración de valores para el cómputo de las políticas, que es lo más común, la convergencia del método está relacionada con la convergencia de este algoritmo. Además, en todos los casos hay que diseñar una regla de parada para el mismo. Presentamos las condiciones más débiles posibles para la convergencia de algunas sucesiones computables por el algoritmo y los alcances de reglas de parada que se pueden construir a partir de ellas. Esto es de gran importancia puesto que la construcción de reglas de parada para el algoritmo de iteración de valores sin analizar previamente la estructura del proceso, es un problema abierto.

Si bien hay trabajos previos en el análisis de la convergencia del procedimiento de horizonte móvil, en este trabajo presentamos condiciones más generales que los mismos para obtener convergencia geométrica del método.

Además presentamos modificaciones al procedimiento clásico de horizonte móvil que permiten su utilización con buenos resultados sobre una gama más amplia de problemas sin que eso signifique agregar complejidad al cálculo. Más precisamente estas modificaciones lo hacen utilizable sobre problemas periódicos, sobre los que el procedimiento clásico no converge.

---

**Autores: Eduardo Philipp, Hasnaa Zidani, Elina Mancinelli**

**Lugar: FCEIA-UNR**

**Expositor: Eduardo Philipp**

---

Una condición suficiente sobre las restricciones de estado de un problema de control óptimo con una medida de Radon involucrada en la dinámica

Consideramos el siguiente problema de control con restricciones de estado y una medida de Radon involucrada en la dinámica:

$$(E) \begin{cases} \dot{y}_x(t) = f(t, y_x(t), \alpha(t)) + g(t, \alpha(t)) \cdot \dot{u}(t) & \text{para } t \in (\tau, T] \\ y_x(\tau^-) = x \end{cases}$$

donde

- $\alpha \in \mathcal{A}$  es la función de control.
- $\dot{u}$  es una medida de Radon.
- $f, g$  están globalmente acotadas y son  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado de restricciones de estado. Para un  $(x, \tau) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$  fijo, definimos el conjunto de trayectorias admisibles:

$$S_{[\tau, T]}^{\mathcal{K}} := \{y_x \text{ solución de } (E), y_x(s) \in \mathcal{K} \quad \forall s \in [\tau, T]\}$$

Dada  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicontinua inferiormente y  $M_0 > 0$  tal que  $|\varphi(x)| \leq M_0$  para todo  $x \in \mathcal{K}$ . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $M_0 < 1$  y  $\varphi \equiv 1$  en  $\mathcal{K}^c$ . Ahora consideramos la siguiente función valor de estado final con restricciones de estado:

$$V(x, \tau) := \begin{cases} \inf_{\alpha} \left\{ \varphi(y_x(T)), y_x \in S_{[\tau, T]}^{\mathcal{K}} \right\} & \text{si } S_{[\tau, T]}^{\mathcal{K}} \neq \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Debido a la presencia de la medida  $\dot{u}$ , la definición de solución para la ecuación de estado no es clásica. Bajo condiciones adecuadas sobre las funciones involucradas, fijando un control  $\alpha$  en la dinámica, y sin restricciones de estado este problema fue estudiado por Briani-Zidani (2009) y una noción satisfactoria de solución fue hallada usando la técnica de Completación del Gráfico desarrollada por DalMasó-Rampazzo (1991).

Aquí consideramos un problema simplificado con restricciones de estado y obtenemos una condición suficiente sobre  $\mathcal{K}$  de tal manera que los mismos procedimientos pueden ser aplicados, aún con restricciones de estado.

O. Bokanowski, N. Forcadel, H. Zidani, *Deterministic state constrained optimal control problems without controllability assumptions*. Mathematics Subject Classification. 35B37, 49J15, 49Lxx, 49J45, 90C39. 1991.

A. Briani, *A Hamilton-Jacobi equation with measures arising in  $\Gamma$ -convergence of optimal control problems*. Diff and int. equations, 12(6):849-886, 1999.

A. Briani, H. Zidani, *Characterisation of the value function of final state constrained control problems with BV trajectories*, AMS Classification: 49J15, 35F21, 34A37. 2009.

G. Dal Maso y F. Rampazzo, *On systems of ordinary differential equations with measures as controls*, Diff. and int. equations, Vol. 4. Number 4, 739-765, Julio 1991.

E. Philipp, *Problemas de control óptimo con restricciones de estado para sistemas que involucran medidas de Radon*, Tesina de grado de Licenciatura en Matemáticas - FCEIA - UNR - Argentina - Marzo 2010.

**Autores:** F. Levstein, J. Lezama, C. Maldonado, D. Penazzi  
**Lugar:** Universidad Nacional de Córdoba, FAMAF - CIEM-CONICET  
**Expositor:** J. Lezama

---

Autoespacios del grafo de Hamming  $H(2n,2)$ . Aplicaciones en compresión de imágenes

Dado un grafo  $G = (X, E)$  se define la matriz de adyacencia  $A$  por:

$$(A)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si son adyacentes} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

El grafo del hipercubo  $H(n,2) = (X, E)$  tiene como vértices a  $X = \mathbb{Z}_2^n$ , donde dos vértices  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$  son adyacentes si  $|\{i : x_i \neq y_i\}| = 1$ .

El espacio de funciones  $\mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$  se descompone como

$$\mathbb{R}^X = \bigoplus_{j=0}^n V_j$$

donde  $\{V_j\}_{j=0}^n$  son autoespacios de  $A$ , correspondientes a autovalores distintos.

Ordenamos la descomposición teniendo en cuenta  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n$ , donde  $\lambda_j$  es el autovalor de  $A$  en el autoespacio  $V_j$ .

Por otro lado una imagen en escala de grises se representa con una matriz de orden  $m \times r$  en donde cada entrada de la matriz corresponde a un pixel dado en una escala de grises, (intensidad), representada por un entero entre 0 y 255. El color negro corresponde al 0 y el blanco al 255.

En este trabajo consideramos autoespacios de  $H(2n,2)$  para distintos valores de  $n$  y ciertas bases ortogonales de  $\mathbb{R}^{2^{2n}}$  compuestas por autovectores de  $A$ , que forman una matriz ortogonal  $H$ .

Dada una matriz  $F$ ,  $512 \times 512$ , correspondiente a una imagen, subdividimos  $F$  en submatrices de orden  $2^n \times 2^n$ . Llamemos  $v \in \mathbb{R}^{4^n}$  a una de ellas. El vector  $Hv$  contiene las coordenadas de  $v$  en la base de autovectores. Guardamos con mayor precisión las coordenadas correspondientes a autoespacios asociados a los autovalores de mayor valor.

Para analizar nuestros resultados consideramos distintas imágenes y calculamos el error cuadrático medio de la imagen reconstruida con su original. El histograma de la diferencia de estas imágenes muestra una gran concentración alrededor del 0. El software utilizado en este trabajo es ENVI 4.3 con una base de datos de imágenes con distintos contrastes de grises.

V. Madisetti., D. Williams *The digital signal processing handbook*, (CRC PRESS, IEEE PRESS, 1998).

---

**Autores:** Lisandro Parente, Pablo Lotito, Aldo Rubiales  
**Lugar:** CONICET-UNR, CONICET-UNICEN  
**Expositor:** Lisandro Parente

---

Resolución de problemas de coordinación hidrotérmica con restricciones de red mediante métodos proximales

En este trabajo se aborda un problema de planificación a corto plazo de unidades de generación eléctrica en un mercado oligopólico hidrotérmico, considerando restricciones de red. Se presenta un modelo donde intervienen unidades hidráulicas de bombeo, que pueden recuperar agua en períodos de baja demanda pagando por la electricidad consumida. A partir de la teoría de equilibrio de Nash-Cournot, se obtiene una inclusión monótona que permite la aplicación de esquemas proximales. Se describe la implementación y se presentan ejemplos.

---

**Autores:** Jorgelina Walpen, Elina M. Mancinelli  
**Lugar:** FCEIA - UNR  
**Expositor:** Jorgelina Walpen

---

Un planteo binivel para el problema de la contaminación vehicular del aire

Los programas de optimización binivel son intrínsecamente difíciles dado que son, generalmente, problemas de optimización no convexos y no diferenciables. Esta clase de problemas están caracterizados por dos niveles de decisión, el nivel superior que busca optimizar una función de su variable de control y otra variable que es la reacción a la primera en el nivel inferior.

En su forma más general pueden presentarse como:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x, y) \\ \text{s.a.} & y \in S(x) \\ & (x, y) \in K. \end{array}$$

donde  $x$  es la variable de control,  $y$  es la variable de estado,  $f$  es la función objetivo,  $K$  es un conjunto cerrado de pares  $(x, y)$  admisibles y  $S$  es una función posiblemente multivaluada. La relación  $y \in S(x)$  indica que  $y$  es la solución a un problema de equilibrio parametrizado en  $x$ .

En nuestro caso específico la formulación binivel involucra un problema de optimización en el nivel inferior que resuelve el problema del equilibrio del usuario que admite solución única. Matemáticamente, dada una red de transporte urbano  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  y un conjunto de demandas  $\mathcal{D}$  con orígenes  $o \in \mathcal{N}$  y destinos  $d \in \mathcal{N}$ , el problema de asignación de tráfico consiste en determinar los flujos  $f_a$  en los arcos  $a \in \mathcal{A}$  cuando el tiempo de viaje  $t_a$  en un arco  $a$  es una función del flujo  $f_a$ . Considerando un modelo estático para el cual no existe interacción entre los arcos y tratando de resolver el problema de asignación de tráfico que resulta del equilibrio del usuario propuesto por Wardrop (caso determinístico), la solución de equilibrio estará garantizada si todos los usuarios para el mismo par  $(o, d)$  viajan por rutas con iguales tiempos (óptimos) de recorrido.

El nivel superior se concentra en la minimización de los niveles de contaminación del aire en arcos específicos introduciendo un parámetro de control que modifica sus costos de viaje en vacío (flujo nulo), con la intención de desalentar el uso de tales arcos.

Introducimos una aplicación de esta formulación a un modelo de la red urbana del centro de la ciudad de Rosario. Implementamos un heurística [4] y los algoritmos disponibles en la toolbox CiudadSim [1], para resolver el problema y finalmente analizar los resultados numéricos.

CiudadSim: <http://www-rocq.inria.fr/metalau/ciudadsim/>

Josefsson M., Patriksson M. (January 2007), *Sensitivity analysis of separable traffic equilibrium equilibria, with application to bilevel optimization in network design*, Transportation Research, part B: Methodological, Vol. 41, pp. 4-31.

Larsson T., Patriksson M. (1992), *Simplicial Decomposition with Disaggregated Representation for the Traffic Assignment Problem*, Transportation Science, 26, pp.4-17.

Lotito P., Mancinelli E., Quadrat J.P., Wynter L. (May 2002), *Bilevel Programs on Traffic Networks*, Les Journées de l'Optimisation - Optimization Days 2002. Montreal, Canadá.

Patriksson M. (1994), *The Traffic Assignment Problem. Models and Methodes*, VSP BV, Utrecht.

Walpen J. (March 2010), *Sobre la afectación de tráfico*, Mathematical degree thesis, FCEIA, UNR, Argentina.

**Autores:** Elvio A. Pilotta, Germán A. Torres

**Lugar:** FAMAF - Universidad Nacional de Córdoba / CIEM-CONICET

**Expositor:** Elvio A. Pilotta

---

Análisis y formulaciones de un algoritmo de restauración inexacta para optimización bilevel

Los métodos de Restauración Inexacta fueron introducidos para resolver problemas de optimización no lineal [2,3]. Estos métodos pueden ser aplicados a problemas de programación *bilevel* sin reformularlos como un problema de programación no lineal de un nivel [1]. Esta estrategia evita puntos estacionarios espurios que podrían aparecer cuando se reemplaza un problema de optimización por restricciones dadas por las correspondientes condiciones de optimalidad.

En esta presentación mostraremos un estudio numérico basado en el desarrollo de un sistema computacional de un algoritmo eficiente de Restauración Inexacta aplicado a problemas de programación bilevel. Analizamos diversas formulaciones y criterios de parada, teniendo en cuenta la estructura del problema. Este sistema es altamente configurable y permite el uso de otros *solvers* disponibles para la resolución de subproblemas. Para validar este estudio se presentan resultados numéricos comparativos usando un conjunto de problemas test.

[1] R. Andreani, S. Castro, J. Chela, A. Friedlander, S. Santos, *An inexact-restoration method for nonlinear bilevel programming problems*, Comput. Optim. Appl, DOI 10.1007/s10589-007-9147-4, 2007.

[2] J. M. Martínez, *Two-phase model algorithm with global convergence for nonlinear programming*, J. Optim. Theory Appl. 96(2), 397-436, 1998.

[3] J. M. Martínez, E. A. Pilotta, *Inexact-restoration algorithm for constrained optimization*, J. Optim. Theory Appl. 104, 135-163, 2000.

**Autores:** P. Amster (\*) C. Averbuj (\*)(\*\*)

**Lugar:** (\*) Depto de Matemática, FCEyN-UBA (\*\*)CIETyMA, Escuela de Economía y Negocios-UNSAM

**Expositor:** C. Averbuj

---

Problema Estacionario asociado a Ecuaciones Integro-diferenciales  
provenientes de modelos tipo Black-Scholes con saltos y costos de  
transacción

La ecuación de Black-Scholes para valorar opciones ha adquirido gran importancia en los últimos años, y ha sido estudiada por numerosos autores (ver, por ejemplo, [A], [H], [I]). En principio, este modelo supone que el activo subyacente es una acción cuyo valor sigue un movimiento geométrico Browniano, donde la variación en el precio marginal se debe esencialmente a la oferta y la demanda del respectivo activo. Asimismo, podemos considerar las posibles variaciones en el precio de la acción debido a información relevante proveniente de la propia compañía o su respectiva industria. En función de esta situación habrá momentos de "calma" y momentos en los que se producen variaciones bruscas en los precios ("saltos"). En consecuencia, podemos pensar el arribo de esta nueva información como un proceso de punto, y en particular notar que verifica los axiomas que rigen un proceso de Poisson, por lo tanto esta componente en la valuación de la acción es modelado por un proceso de Poisson (ver [M], [AA]).

En este trabajo hemos incorporado los costos de transacción que surgen de la compra/ venta del activo subyacente, los cuales se suponen como una función lineal decreciente  $f(v) = a - b|v|$   $a, b > 0$ , dependiente de la cantidad del activo necesario en cada rebalanceo. Si consideramos los dos componentes que pueden modificar el valor del activo  $S$ , se obtiene la siguiente ecuación integro - diferencial parcial en las variables  $t$  y  $S$ :

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + LV = g(t, S)V - E(V(SY, t) - V(S, t))$$

donde el operador  $L$  está dado por

$$(2) \quad LV = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - a \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 b S^3 \sigma^2 + (r - \lambda k) \frac{\partial V}{\partial S} S$$

En esta ecuación  $r$  es la tasa libre de riesgo,  $\lambda$  es la intensidad del salto,  $k = E(Y - 1)$ , donde  $Y - 1$  es la variable aleatoria que representa el cambio en

el precio del activo  $S$ , si el proceso de Poisson ocurre, y  $E$  es el operador esperanza sobre la variable aleatoria  $Y$ ,  $g(t, S)$  es la tasa instantánea de retorno en equilibrio de la opción, para mas detalles ver [M], [AA] Bajo condiciones adecuadas, estudiaremos soluciones del problema estacionario asociado a (1)-(2) con condiciones de Dirichlet utilizando el teorema de Schauder.

[A] M. Avellaneda, Quantitative modeling of derivatives securities, Chapman & Hall/CRC, 2000.

[AA] L. Andersen, J. Andreasen, Jump diffusion processes: volatility smilefitting and numerical methods for option pricing. Review of derivatives research, 4, 231-262, 2000.

[H] J.C. Hull, Options, Future and other Derivatives. Prentice - Hall, Inc. 1997.

[I] Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and diffusion processes. North - Holland, 1989.

[M] R. C. Merton, Continuous - Time Finance. Blackwell, Cambridge 2000.

---

**Autores: Juan José María Martínez**

**Lugar: Centro de Investigación en Economía Teórica y Matemática Aplicada - Escuela de Economía y Negocios - Universidad Nacional de San Martín**

**Expositor: Juan José María Martínez**

---

#### Modelo de agentes interactuantes con estrategias complejas para un mercado financiero

El uso de algoritmos computacionales permite simular el comportamiento de sistemas complejos. Enfoques actuales orientan dichas herramientas a la Economía y las Finanzas -[1], [2] -. En particular, los modelos de agentes -[3], [4], [5]- pretenden, a partir de la interacción de dichas unidades - parcialmente relacionadas, que disponen de información incompleta y con estrategias disímiles- recrear comportamientos colectivos y auto-organizados. En el caso de las Finanzas, las desviaciones de la "normalidad" frecuentemente observadas son un campo fértil para estos modelos. El modelo aquí presentado, parte de la existencia de dos tipos de agentes con comportamientos antagónicos-complementarios que compiten en un mercado. Mediante el uso de algoritmos estocásticos que simulan estrategias racionales y de racionalidad acotada se recrea la evolución del precio con un mecanismo de búsqueda de equilibrio. Las simulaciones del modelo se realizan en un software desarrollado para tal efecto.

[1] Computational Intelligence in Economics and Finance Volume I -2006- y Volumen II -2007- Springer.

[2] Handbook of Computational Economics, Volume 2 -2006-, Elsevier.

[3] E. Samanidou, E. Zschischang, D. Stauffer, and T. Lux: Agent-based Models of Financial Markets, arXiv:physics/0701140v1 [physics.soc-ph] -2007-

[4] Voit, Johannes: The Statistical Mechanics of Financial Markets -2007- Springer.

[5] Thomas Lux: Applications of Statistical Physics in Finance and Economics -2008- Kiel Institute for the World Economy.

---

**Autores: Esteban diTada y Eduardo Serrano**  
**Lugar: Universidad de Palermo**  
**Expositor: Eduardo Serrano**

---

### Modelo markoviano de un sistema logístico

Se expone un modelo markoviano a tiempo continuo de un sistema de servicio. El mismo consta de  $M$  equipos idénticos que funcionan en forma independiente y continua.

La confiabilidad de los equipos se caracteriza por una tasa media de fallas igual a  $1/\lambda$ . Asimismo, el sistema cuenta con stock de repuestos, con disponibilidad máxima  $R$ , que posibilita la reparación, a razón de un repuesto por equipo, en forma inmediata después de una eventual falla. Si el stock no está completo y la cantidad de repuestos  $r$  no es máxima, se genera la correspondiente demanda. La llegada de los repuestos solicitados son sucesos independientes y obedece a una tasa media de arribo igual a  $1/\mu$ .

Los estados del sistema se denotan  $(m, r)$ , para  $0 \leq m \leq M$  y  $0 \leq r \leq R$ , indicando la cantidad de equipos en servicio y la de repuestos disponibles. Las cantidades  $P(t, m, r)$  representan las probabilidades que en el tiempo  $t$  el sistema se encuentre en el estado  $(m, r)$ . Bajo apropiadas hipótesis se formula el modelo dinámico markoviano, mediante el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\frac{dP(t, m, r)}{dt} = L_{m,r}(P(t, M, R), \dots, P(t, j, k), \dots, P(t, 0, 0))$$

para cada  $(m, r)$ . Se caracterizan las soluciones en el estado estacionario, en función de los parámetros  $M, R, \lambda$  y  $\mu$  y las propiedades ergódicas del proceso. Las estimaciones de las correspondientes medias estacionarias  $\bar{m}$  y  $\bar{r}$  permiten diseñar acciones de previsión y control.

**Autores:** Romina Cardo y Alvaro Corvalan  
**Lugar:** Universidad Nacional de General Sarmiento  
**Expositor:** Romina Cardo

---

#### Filtros no lineales en Potenciales Evocados de Redes Neuronales

Abordamos el problema de la obtención de información acerca del reconocimiento de incongruencia o incompatibilidad con patrones lógicos ya impresos de una subred de una red neuronal, ya sea cerebral, o diseñada artificialmente, mediante la medición de los potenciales evocados cerebrales o de datos univariados equivalentes en el caso sintético. El objetivo ulterior es la detección de inconsistencias lógicas del discurso, no puramente semánticas, sino del reconocimiento de frases no coherentes con una línea de relato. La posible utilización en señales asociadas a las respuestas mencionadas sugiere variadas aplicaciones como posibles pruebas objetivas de responsabilidad legal, imputabilidad, insania, entre otras. Las dificultades en la aplicación de las herramientas convencionales de análisis de series de tiempo, particularmente la identificación de los parámetros de un modelo lineal tipo ARIMA, para tratar de aislar la actividad no asociada a la respuesta a fin de extraer luego esta última no parecen conducir a ajustes demasiado exitosos, por lo que sugerimos otra línea de análisis. En este trabajo estudiamos la utilización de filtros tipo Kalman no-lineales como herramienta para estimar respuestas evocadas en el cerebro o en una red neuronal ante la aparición de estímulos no congruentes con las memorias impresas en una presunta subred destinada a tal reconocimiento, tomando la respuesta de la subred como una variable no medible directamente sino sumada a la actividad del resto de la red que contribuye en forma de perturbación de carácter no-gaussiano. En el caso cerebral la variable mensurable está constituida por las deflexiones del voltaje medido en electrodos sobre la superficie craneana, de la que se abstrae idealmente la respuesta evocada. Ensayamos previamente una emulación del problema real, simulado en redes neuronales de tipo Hopfield, donde se puede probar la consistencia del estimador del valor de la suma de la subred cuya actividad se quiere estimar, y verificamos con éxito satisfactorio la estimación de la respuesta para valores pequeños del número de ensayos en una red subdividida de tamaño moderado no saturada. Adicionalmente, se usan los resultados de los casos sintéticos para ajustar los parámetros del estimador para usarlo luego en el caso real. Se presentan adicionalmente los sugestivos resultados obtenidos hasta ahora en las mediciones sobre sujetos humanos.

[1] “Time-Varying ARMA modelling of Nonstationary EEG using Kalman Smoother Algorithm”, Mika P, Perttu O, An Pasi, Proceedings of the 2001 Finnish Signal Processing Symposium, Espoo, Finland, 2001.

[2] “Identification of the response of brain and artificial neural networks in the presence of usual and unusual stimuli by means of Kalman-type filters”, Cardo, Romina, y Corvalán, Álvaro, accepted for publication in Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones. Publicación del Centro de Investigaciones en Matemática Pura y Aplicada (CIMPA) y la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica.

## Ecuaciones Diferenciales

*Organizan:*

*Noemí Wolanski y Julián Fernández Bonder*



**Conferencia Invitada**

**J.P. Pinasco**

**Depto Matematica, FCEN UBA**

---

Crecimiento anómalo de autovalores en problemas singulares

En esta comunicación veremos distintos problemas singulares cuyos autovalores tienen un crecimiento asintótico anómalo. Para el problema

$$-u'' = \lambda q(x)u \quad x \in (0, \infty)$$

con distintas condiciones de borde en 0 e infinito, algunos ejemplos fueron obtenidos por Einar Hille en [2], y redescubiertos luego por Naimark y Solomyak en [3], y en [4].

En estos trabajos las técnicas fueron muy diferentes. El método de [2] puede extenderse a problemas no lineales que involucran el p-laplaciano, mientras que el de [3] permite tratar problemas variacionales, de mayor orden pero lineales. Aquí describiremos cómo generalizar el método de [4] a distintos problemas de mayor orden, no necesariamente lineales ni variacionales, utilizando una desigualdad que demostramos en [1].

M.J. Castro and J.P. Pinasco, *An Inequality for Eigenvalues of Quasilinear Problems with Monotonic Weights*, to appear in Applied Math Letters.

E. Hille, *An Application of Prufer's Method to a Singular Boundary Value Problem*, Mathematische Zeitschrift, (1959) 95-106.

K. Naimark and M. Solomyak, *Regular and Pathological Eigenvalue Behavior for the Equation  $-u'' = \lambda V u$  on the Semiaxis*, J. Funtional Analysis, 151 (1997) 504-530.

J. P. Pinasco. *The Distribution of Non-Principal Eigenvalues of Singular Second Order Linear Ordinary Differential Equations*, Int. J. of Math. and Mathematical Sci., 2006 (2006) Article ID 29895, 1-7.

---

**Conferencia Invitada**

**Pablo De Nápoli**

**Universidad de Buenos Aires, FCEyN**

---

Condiciones del tipo de Lazer-Leach no asintóticas para un oscilador no lineal

Un resultado conocido de Lazer y Leach [2] establece que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y acotada con límites en infinito y  $m \in \mathbb{N}$ , entonces el problema

resonante

$$u'' + m^2 u + g(u) = p(t) \quad 0 < t < 2\pi$$

con  $p \in L^2(0, 2\pi)$  y condiciones periódicas

$$u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi).$$

admite por lo menos una solución siempre que:

$$\sqrt{\alpha_m(p)^2 + \beta_m(p)^2} < \frac{2}{\pi} |g(+\infty) - g(-\infty)|,$$

donde  $\alpha_m(p)$  y  $\beta_m(p)$  son los  $m$ -ésimos coeficientes de Fourier del término forzante  $p$ .

En esta comunicación, presentaremos los resultados de [1] donde demostramos que, al igual que ocurre en el caso  $m = 0$ , la condición en  $g$  puede ser relajada, de modo que (en particular) no asumimos ningún comportamiento particular de  $g$  en el infinito.

Es un trabajo en colaboración con Pablo Amster.

P. Amster, P. De Nápoli. Non-asymptotic Lazer-Leach type conditions for a nonlinear oscillator. Aparecerá en *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*.

A. Lazer and D. Leach, Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance, *Ann. Mat. Pura Appl.* 82 (1969), 49-68.

---

**Autores: Tomás Godoy, Uriel Kaufmann, Sofía Paczka**

**Lugar: FaMAF, UNC**

**Expositor: Uriel Kaufmann**

---

### Existencia y multiplicidad de soluciones positivas para ciertos problemas superlineales

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio suave y acotado y sean  $a, b, c$  tres funciones  $T$ -periódicas (posiblemente discontinuas y no acotadas) con  $c \geq 0$ . Estudiamos existencia y no existencia de soluciones positivas para problemas periódicos parabólicos de la forma

$$\begin{cases} Lu = \lambda (a(x, t) u^p - b(x, t) u^q + c(x, t)) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \text{ } T\text{-periódica} \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro real y  $p > q \geq 1$ . Si  $a$  y  $b$  satisfacen algunas condiciones adicionales y  $p < (N + 2) / (N + 1)$  también se dan resultados de

multiplicidad. Discutimos asimismo propiedades cualitativas de las soluciones. Las pruebas se basan en el método de sub y supersoluciones (tanto para encontrar la solución estable como para la inestable) combinado con diversos resultados sobre problemas lineales con peso de signo indefinido.

Todos los resultados permanecen válidos para los correspondientes problemas elípticos, esto es,

$$\begin{cases} Lu = \lambda (a(x) u^p - b(x) u^q + c(x)) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Más aún, en este caso la restricción sobre el crecimiento es  $p$ .

---

**Conferencia Invitada**

**Leandro del Pezzo**

**Universidad de Buenos Aires**

---

Un Problema de Optimización para la mejor constante de Sobolev en dominios con agujeros

En esta charla hablaremos acerca de la constante de traza de Sobolev para funciones definidas en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  que se anulan en un subconjunto abierto  $A$ . Mostraremos que esta constante es derivable respecto a ciertas perturbaciones sobre el agujero  $A$ . Como un corolario de esto mostraremos que en algunos casos, cuando  $\Omega$  es una bola centrada en el origen, el agujero simétrico es crítico, considerando deformaciones que preservan el volumen, pero no es óptimo.

**Autores:** Griselda R. Itovich y Jorge L. Moiola

**Lugar:** Escuela de Tecnología, Producción y Medio Ambiente - Sede Alto Valle, Universidad Nacional de Río Negro e Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIIIE (UNS-CONICET) y Dpto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur

**Expositor:** Griselda R. Itovich

---

#### Análisis de estabilidad de soluciones periódicas

Si consideramos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) o ecuaciones diferenciales con retardos temporales (EDRs) donde aparecen ciertos parámetros, es usual estudiar la estabilidad de sus soluciones de equilibrio. Cuando se trata de una solución constante, esto deriva en el análisis de las raíces de un polinomio o de un cuasipolinomio, según sea el caso de EDOs o EDRs respectivamente. Entonces, si alguna raíz cruza el eje imaginario mientras se hace variar algún parámetro se produce un cambio en la estabilidad del equilibrio. En particular, si aparece un par de raíces complejas conjugadas que cruzan del semiplano izquierdo al derecho, puede ocurrir una bifurcación de Hopf. Este fenómeno está relacionado con la aparición de nuevas soluciones de equilibrio, ahora, periódicas. La metodología en el dominio frecuencia (Mees y Chua (1979), Moiola y Chen (1996)) permite abordar este problema localmente: detectar bifurcaciones de Hopf en EDOs y en EDRs y además dar una expresión aproximada para las soluciones periódicas emergentes. Para analizar la estabilidad de las mismas, uno debe analizar una EDO o una EDR lineal homogénea con coeficientes periódicos. Los métodos que pueden emplearse para estudiar estos sistemas son diversos: promediación, perturbación, y la teoría de Floquet junto con integración numérica, por citar algunos. La idea de este trabajo es estudiar la estabilidad de las soluciones periódicas resolviendo los sistemas anteriores mediante polinomios de Tchebyshev (Sinha y Wu, 1991). Así las soluciones de los mismos se aproximarán mediante estos polinomios y esto llevará a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Con este mismo enfoque, se puede obtener en forma simbólica la matriz fundamental de soluciones para una EDO lineal homogénea con coeficientes periódicos, donde aparecen parámetros (Sinha y Butcher, 1997). De esta forma se podrán hallar distintas curvas de bifurcaciones de ciclos a partir de la expresión simbólica del ciclo emergente de la bifurcación de Hopf.

Mees, A. I. y Chua, L. (1979). The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 26(4):235-254.

Moiola, J. L. y Chen, G. (1996). *Hopf Bifurcation Analysis - A Frequency Domain Approach*. World Scientific Publishing Co, Singapur.

Sinha, S. C. y Wu, D.-H. (1991). An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *J. of Sound and Vibration*, 151(1):91-117.

Sinha, S. C. y Butcher, E. A. (1997). Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems. *J. of Sound and Vibration* 206(1):61-85.

---

**Autores: Andrea Bel, Walter Reartes**

**Lugar: CONICET y Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur**

**Expositor: Andrea Bel**

---

Ciclos periódicos en una ecuación del tipo de van der Pol con retardo

Se estudia una ecuación del tipo de van der Pol con retardo de la forma:

$$x''(t) + \epsilon(x(t)^2 - 1)x'(t) + x(t) = d\epsilon x(t - \tau),$$

con el objeto de encontrar soluciones periódicas al variar los parámetros  $\epsilon$ ,  $d$  y  $\tau$ , estudiar su estabilidad y descubrir las dinámicas relacionadas con las mismas, como por ejemplo bifurcaciones de Hopf, Hopf dobles o de ciclos.

Se aplica un método de análisis homotópico [1] para encontrar expresiones analíticas de los ciclos periódicos. A partir de éstas se plantean y resuelven numéricamente ecuaciones lineales para obtener aproximaciones de los primeros multiplicadores de Floquet, que determinan la estabilidad del ciclo, mediante el uso de polinomios de Chebyshev.

Liao, Shijun. Beyond perturbation: introduction to homotopy analysis method, CHAPMAN & HALL/CRC, (2004).

---

**Autores: P. Bonfili, A. Torresi, G. Calandrini, J. Moiola**

**Lugar: Universidad San Juan Bosco y Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur**

**Expositor: P. Bonfili**

---

Bifurcaciones degeneradas de Hopf en el dominio frecuencia

En este trabajo se determinan condiciones de definición y no degeneración para caracterizar ciertos tipos de bifurcaciones dinámicas en el dominio frecuencia, en particular bifurcaciones de Hopf degeneradas. Se utiliza un método basado en la teoría de control [5, 6, 7] para determinar órbitas periódicas

---

y la teoría de singularidades para la clasificación de diagramas  $\mathbb{Z}_2$ -equivariantes [2, 3].

Sea  $\mathcal{D}$  el sistema dinámico  $n$ -dimensional no lineal descrito por  $\dot{x} = F(x, \mu)$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  es el parámetro de bifurcación,  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial suave que en el equilibrio  $x = 0$  verifica  $F(0, \mu) = 0$ .

Eligiendo adecuadamente las variables de entrada y salida [1] y una re-alimentación  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$  no lineal se pasa a la representación como un sistema autónomo  $\mathcal{S}$ , descrito por la ecuación  $\mathcal{G}f(y, \mu) + y = 0$  donde  $\mathcal{G}$  es un operador lineal entre los espacios de entrada y salida con función de transferencia racional propia  $G(s, \mu)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$  e  $\hat{y}$  es la solución de equilibrio de  $G(0, \mu)f(y, \mu) + y = 0$ .

Se supone que existe una única función característica simple de la función transferencia de lazo abierto  $G(i\omega, \mu)(Df)_{\hat{y}}$ , que notamos  $\hat{\lambda}(\omega, \mu)$ , tal que para una única frecuencia  $\omega_0$ ,  $\hat{\lambda}(\omega_0, \mu_0) = -1$ , condición necesaria en el dominio frecuencia para la existencia de soluciones periódicas.

Con esta única condición y notando  $L_q(\omega, \mu) = -1 + \sum_{k=1}^q \theta^{2k} \xi_k(\omega, \mu)$ , la ecuación de bifurcación de órbitas periódicas en el dominio frecuencia es

$$(1) \quad \theta \left( \hat{\lambda}(\omega, \mu) - L_q(\omega, \mu) + \mathcal{O}(\theta^{2q+2}) \right) = 0,$$

donde las soluciones no nulas de (1) están en correspondencia uno a uno con las soluciones periódicas de pequeña amplitud  $\theta$  del sistema  $S$  con período cercano a  $2\pi/\omega_0$ .

A partir de esta ecuación se obtienen condiciones de definición y no denegación que determinan cuando la ecuación de bifurcación de codimensión finita que relaciona al parámetro  $\mu$  con la amplitud  $\theta$ , si  $z = \theta^2$ , es  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal

$$(z^m \pm \mu)\theta,$$

de codimensión  $m - 1$  y base para el despliegue  $\{z, z^2, \dots, z^{m-1}\}$ , o a

$$(z \pm \mu^k)\theta$$

de codimensión  $k - 1$  y base para el despliegue  $\{1, \mu, \dots, \mu^{k-2}\}$ .

Los resultados obtenidos son una generalización de los que se encuentran en [4, 7]. Las caracterizaciones en el dominio frecuencia presentan la ventaja que junto a los despliegues universales permiten modificar los tipos de bifurcaciones variando adecuadamente los parámetros distintivos y resultan de fundamental importancia en el diseño y control de los sistemas.

G. Agamennoni, G. Calandrini and J. Moiola, Some Realizations in the study of oscillations with a Frequency Method, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Serie B, 15 1 (2008), 99-110.

- M. Golubitsky and W. F. Langford, Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcation, *Journal of Differential Equations*, **41** (1981), 375-415.
- M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, 1 Springer-Verlag, Berlin, New-York, (1985).
- G. Itovich and J. Moiola, Characterization Of Dynamic Bifurcations In The Frequency Domain. *International Journal Of Bifurcation And Chaos*, **12** 1 (2002), 87 - 101.
- A. Mees, *Dynamics of Feedback Systems*, Wiley, New York, (1981).
- A. Mees and L. Chua, The Hopf Bifurcation Theorem and its Aplications to Nonlinear Oscillations in Circuits and Systems, *IEEE Trans. on Circ. Sys.*, **26** (1979), 235-254.
- J. Moiola and G. Chen, it Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach, **21** Nonlinear Science, World Scientific Co., Singapore, (1996).
- 

**Autores: Pablo Groisman y Santiago Saglietti**

**Lugar: FCEyN UBA**

**Expositor: Santiago Saglietti**

---

### Impredecibilidad del tiempo de explosión para pequeñas perturbaciones aleatorias de sistemas dinámicos

En nuestro trabajo consideramos la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} u'_1 &= \frac{2}{h^2}(-u_1 + u_2) + \varepsilon \dot{W}_1 \\ u'_i &= \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \varepsilon \dot{W}_i \\ u'_d &= \frac{2}{h^2}(-u_d + u_{d-1} + h((u_d^+)^p - u_d)) + \varepsilon \dot{W}_d. \end{cases} \quad \text{si } 2 \leq i \leq d-1$$

donde  $W = (W_1, \dots, W_d)$  es un movimiento Browniano  $d$ -dimensional,  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < h \leq 1$  y  $p > 1$  son parámetros. Para el caso  $\varepsilon = 0$ , el sistema determinístico que se obtiene proviene de discretizar espacialmente la ecuación del calor en el intervalo  $(0, 1)$  con condición de borde de Neumann dada por  $u_x(1, t) = (u^+(1, t))^p - u(1, t)$ ,  $u_x(0, t) = 0$ . Este sistema cuenta con dos equilibrios, el origen y  $v = (1, \dots, 1)$ . El primero de ellos es asintóticamente estable y el segundo inestable. Más aún, se tiene que para condiciones iniciales  $u_0 \geq v$ ,  $u_0 \neq v$  el sistema explota en tiempo finito y para  $0 \leq u_0 \leq v$ ,  $u_0 \neq v$  el sistema está definido globalmente y converge al origen.

Consideramos entonces perturbaciones por ruido blanco de este sistema. Probamos que para condiciones iniciales en el dominio de atracción del origen las soluciones explotan en tiempo finito con probabilidad que tiende a 1 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esto muestra un comportamiento cualitativo distinto al del sistema determinístico. Sin embargo, el tiempo de explosión es de orden  $e^{C/\varepsilon^2}$  y bajo una normalización adecuada, estos tiempos tienden en distribución

a una variable aleatoria exponencial. Para condiciones iniciales no negativas en la región en donde el sistema determinístico explota, mostramos también que el tiempo de explosión del sistema estocástico converge en probabilidad al tiempo de explosión determinístico.

---

**Conferencia Invitada**  
**Hugo Aimar**  
**IMAL-CONICET-UNL**

---

Sobre la desigualdad de Harnack parabólica y la dimensión del espacio tiempo

Cuando el espacio-tiempo  $\mathbb{R}^{d+1}$  se lo equipa con la distancia parabólica

$$d((x, t); (y, s)) = \max\{|x - y|, \sqrt{|t - s|}\},$$

que es la naturalmente asociada a la desigualdad de Harnack para temperaturas positivas, resulta que su dimensión de Hausdorff es  $d + 2$ .

Mostramos que esta restricción dimensional en el espacio-tiempo subsiste aún para la métrica asociada a la desigualdad de Harnack cuando la parte elíptica del operador de difusión es no homogénea ni isótropa y la elipticidad puede degenerar como pesos de Muckenhoupt.

---

**Autores: Francisco Nicolás**  
**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**  
**Expositor: Francisco Nicolás**

---

Existencia de Inversos a derecha para operadores diferenciales lineales de primer orden

Sea  $\Omega$  un abierto, conexo, acotado y con borde Lipschitz. Sea  $A = ((a_{ij})) \in C^0(\bar{\Omega}, GL(d))$ , una matriz no singular uniformemente continua, y  $B = (b_1, \dots, b_d) \in L^s(\Omega)^d$ ,  $s > d$ . Consideremos el operador

$$L : W_0^{1,p}(\Omega)^d \longrightarrow R(L) \subset L^p(\Omega), \quad 1$$

definido por

$$Lu = \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij} u_{x_j}^i + \sum_{1 \leq i \leq d} b_i u^i.$$

Probaremos que  $L$  admite un inverso lineal a derecha acotado. Además y en particular, describiremos  $R(L)$  asumiendo que  $\operatorname{div} A = (\operatorname{div}(a_1 \cdot), \dots, \operatorname{div}(a_d \cdot)) \in L^s(\Omega)^d$ ,  $s > d$ . Como corolario de este resultado obtendremos desigualdades del tipo Poincaré. Por ejemplo, al hacer  $B = \operatorname{div} A \in L^s(\Omega)^d$ ,  $s > d$ , se deduce

$$\|f - \bar{f}\|_q \leq C \|A \nabla f\|_{-1, q} \quad \forall f \in L^q(\Omega), \quad q > \frac{s}{s-1}.$$

Finalmente veremos que al asumir mayor regularidad en  $A$  y  $B$  se obtienen resultados análogos en espacios de mayor orden de regularidad.

---

**Autores:** Eduardo A. Santillán Marcus (+)(\*), Ma. Fernanda Natale (\*)  
**Lugar:** (+) Fac. de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura - UNR, (\*) Fac. de Cs. Empresariales, Universidad Austral, Rosario  
**Expositor:** Eduardo A. Santillán Marcus

---

Estudio analítico de un modelo de desublimación de humedad en un medio poroso finito mediante ecuaciones integrales de Volterra

Se continúan y mejoran los resultados obtenidos en Santillán Marcus y Tarzia (Comp. and Appl. Math. 22 (2003) 293-311), obteniéndose analíticamente existencia y unicidad local de solución para el modelo teórico de desublimación de humedad en un medio poroso finito con condición de flujo en el borde fijo, mediante el estudio de un sistema equivalente de ecuaciones integrales de Volterra, siguiendo el método de Friedman-Rubinstein.

**Conferencia Invitada**  
**Nicolás Saintier**  
**UBA**

---

Comportamiento asintótico y multiplicidad para ecuaciones singularmente perturbadas con simetría

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta sin borde de dimensión  $n$ , y  $G$  un subgrupo cerrado del grupo de isometría  $Isom_g(M)$  de  $(M, g)$  tal que  $\bar{n} := n - k > 2$ , donde  $k := \min_{x \in M} \dim Gx$ . Estudiamos el comportamiento asintótico de una sucesión acotada  $(u_\varepsilon)$  de soluciones  $G$ -invariantes de una ecuación subcrítica singularmente perturbada de la forma

$$(2) \quad \varepsilon^2 \Delta_g u + u = f|u|^{p-2}u,$$

donde  $f$  es una función suave  $G$ -invariante positiva, y  $p \in (2, 2\bar{n}/(\bar{n} - 2))$  es subcrítico para las funciones  $G$ -invariantes. Como aplicación obtenemos un resultado de multiplicidad de soluciones  $G$ -invariantes positivas a (2) usando la categoría de Lyusternik-Schnirelman del espacio de las orbitas de  $G$ .

---

**Autores: Pablo Amster y Mariel Paula Kuna**  
**Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires**  
**Expositor: Mariel Paula Kuna**

---

Existencia de soluciones periódicas para ciertos sistemas no lineales

Estudiamos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$(3) \quad u'' + f(u') + g(t, u) = \bar{p} \quad 0 \leq t \leq T$$

bajo condiciones periódicas:

$$(4) \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T).$$

Suponemos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones continuas y  $\bar{p}$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Además  $f$  es acotada y  $g$  es acotada por una función de  $L^2$  en el siguiente sentido: existe alguna  $h \in L^2(0, T)$  tal que  $|g(t, x)| \leq h(t)$  para casi todo  $t \in [0, T]$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Nuestro objetivo es estudiar el conjunto

$$I = \{\bar{p} \in \mathbb{R}^n / \text{el problema (3) - (4) tiene solución}\}$$

En este trabajo demostramos que  $I$  es un compacto, conexo y no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Más aún, empleando el método de super y sub soluciones (ver, por ejemplo, [1]), estudiamos la geometría de dicho conjunto. Nuestros resultados generalizan los obtenidos en [2] para el caso escalar, que abarcan, entre otros casos, la ecuación del péndulo forzado con fricción.

[1] C. De Coster y P. Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results, en *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, ed. Zanolin, CISM-ICMS courses and lectures 371, Springer Verlag, New York 1996.

[2] P. Habets, P.J. Torres, Some multiplicity results for periodic solutions of a Rayleigh differential equation. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Serie A: Mathematical Analysis* 8, No. 3 (2001), 335-347.

---

**Autores: Pablo Amster, Alberto Déboli**  
**Lugar: Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UBA**  
**Expositor: Alberto Déboli**

---

Existencia de solución para un sistema con la no linealidad dependiendo de los valores de la solución en el borde

El problema de valores de borde con condiciones de Neumann homogéneas:

$$(5) \quad \begin{cases} y'' = f(x, y(x), y(0), y(1)), \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

para  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ,  $y \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \cap C^2((0, 1), \mathbb{R})$  presenta la particularidad de que la no linealidad depende de los valores de la solución sobre el borde, obviamente desconocidos.

En un trabajo reciente Amster, Kwong y Rogers [2] han demostrado, utilizando un argumento de shooting 2-dimensional, existencia de solución de (5) para el caso en el cual  $f$  representa el proceso de difusión de dos iones con idénticas valencias a través de un líquido que fluye sobre una membrana eléctricamente neutra en los reservorios [3.]

En otro trabajo reciente [1], usando grado de Leray-Schauder hemos demostrado existencia de solución de (5) para funciones  $f$  que satisfacen una condición de Landesman-Lazer no asintótica y para funciones acotadas de un solo lado o de crecimiento a lo sumo lineal.

En este trabajo demostraremos utilizando teoría de grado topológico [4] existencia de solución para el modelo correspondiente a sistemas:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1)), & x \in (0, 1) \\ \mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}'(1) = 0 \end{cases}$$

con  $\mathbf{y} \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \cap C^2((0, 1), \mathbb{R}^n)$  y para  $\mathbf{f} \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^{3n}, \mathbb{R}^n)$  acotada bajo las siguientes hipótesis:

H1: Existe  $R > 0$  tal que para todo  $\mathbf{v} \in \partial B(0, R)$

$$0 \notin \text{co}(\mathbf{f}([0, 1] \times B(0, r) \times \{\mathbf{v}\} \times B(0, r)))$$

donde  $\text{co}$  denota la cápsula convexa y  $r := |\mathbf{f}|_\infty$ .

H2:  $\deg(\phi, B(0, R), 0) \neq 0$  donde  $\phi(\mathbf{v}) := \int_0^1 \mathbf{f}(s, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) ds$  para todo  $\mathbf{v} \in \bar{B}(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ .

[1] Amster P., Déboli A. A nonlinear problem depending on the unknown Dirichlet values of the solution. NoDEA (Nonlinear Differential Equations and Applications). (Submitted)

[2] Amster P., Kwong M. K. y Rogers C. On a Neumann Boundary Value Problem for Painlevé II in Two Ion Electro-Diffusion. Nonlinear Analysis, TMA.

[3] Leuchtag H. R. A family of differential equations arising from multi-ion electrodiffusion, J. Math. Phys., 22, 1317-1320 (1981).

[4] Mawhin J. Landesman-Lazer conditions for boundary value problems: A nonlinear version of resonance. Bol. de la Sociedad Española de Mat. Aplicada 16 (2000), 45-65.

# Estadística

*Organizan:*

*Ricardo A. Maronna y Jorge G. Adrover*



**Conferencia Invitada**  
**Enrique E. Álvarez**  
**Universidad Nacional de La Plata y CONICET**

---

### Regresión Isotónica Robusta

Supongamos que tenemos una muestra  $\{x(t_j); j = 1, \dots, n\}$ , donde las  $t_j$  representan puntos de observación, análogas a la variable independiente en el contexto clásico de regresión lineal simple, y las variables dependientes  $x_j$  satisfacen una ecuación de tipo de regresión  $x(t_j) = \mu(t_j) + u_j$ , donde los  $u_j$  son perturbaciones aleatorias. En Regresión Isotónica el llamado término de tendencia  $\mu(\cdot)$  está sujeto a una restricción monótona que le impone una estructura no decreciente, es decir que  $\mu(t_j) \geq \mu(t_k)$  para cualquier  $t_j > t_k$ , pero más allá de tal restricción de orden la forma funcional de  $\mu(\cdot)$  es libre. En tal contexto, el estimador clásico de  $\mu(t)$  está dado por las fórmulas “min-max” de los promedios móviles muestrales, es decir  $\max_{(t \geq u)} \min_{(v \geq t)} \text{Av}[x(t_j), u \leq t_j \leq v]$ , donde  $\text{Av}(\cdot)$  denota los promedios simples. De esta manera, el estimador clásico de regresión isotónica es una composición de tres funciones extremadamente sensibles a outliers: los mínimos, los máximos y los promedios locales muestrales.

En nuestro trabajo, proponemos una versión robusta del estimador de regresión isotónica mediante un estimador de tipo “M” basado en la función de discrepancia de Huber. Desarrollamos la distribución asintótica, examinamos la función de influencia y el punto de ruptura asintótico. También ilustramos el uso de la metodología propuesta con datos reales de calentamiento global.

---

**Autores: Juan Lucas Bali, Graciela Boente**  
**Lugar: UBA**  
**Expositor: Juan Lucas Bali**

---

### Función de Influencia de una propuesta robusta para la estimación de componentes principales funcionales

Li y Chen (1985) definieron estimadores robustos de las componentes principales en el caso multivariado, mediante la técnica de projection-pursuit. Los estimadores clásicos buscan las direcciones ortogonales que sucesivamente maximizan la dispersión de la proyección de los datos, la alternativa robusta consiste en considerar medidas de escala que sean resistentes a la presencia

de datos atípicos. En Bali, Boente, Tyler y Wang (2010) se extendieron estas nociones al contexto de datos funcionales, es decir, cuando los datos son elementos de un espacio de Hilbert separable.

En dicho trabajo se demostró la consistencia de los diversos estimadores propuestos y se efectuaron estudios de simulación en donde se demostró la efectividad de los mismos ante la presencia de datos atípicos.

En este trabajo obtenemos medidas de robustez sobre las nuevas propuestas para poder cuantificar su efectividad. Una medida de suma utilidad es la función de influencia. Se extendieron los resultados obtenidos en el caso finito-dimensional por Croux y Ruiz-Gazen(2005) ya que se pudo calcular la función de influencia del estimador de projection-pursuit para el caso de datos funcionales.

---

**Autores: Ricardo Fraiman, Liliana Forzani, Pamela Llop**

**Lugar: Departamento de Matemática, Universidad de San Andrés y CMAT, Universidad de la República, Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (UNL-CONICET) y Universidad Nacional del Litoral, Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (UNL-CONICET)**

**Expositor: Pamela Llop**

---

Predicción y discriminación no paramétrica para datos funcionales

Sea  $T \subset \mathbb{R}$  un intervalo finito y  $E$  es un espacio de funciones. Consideremos el par  $(\tilde{\mathcal{X}}(t), Y)$ , con  $\tilde{\mathcal{X}}(t) \in E$  e  $Y \in \mathbb{R}$  y el operador de regresión

$$(1) \quad r(\tilde{\mathcal{X}}) \doteq \mathbb{E}(Y|\tilde{\mathcal{X}}).$$

El objetivo de este trabajo es, dada una nueva curva  $\mathcal{X}$ , predecir su respuesta escalar  $\hat{y}$  mediante un estimador  $\hat{r}$  del operador de regresión (1). Más precisamente, dada  $\mathcal{X}$ , predecimos su respuesta mediante

$$\hat{y} = \hat{r}(\mathcal{X}) = \hat{\mathbb{E}}(Y|\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}).$$

Para ello, consideremos  $n$  pares independientes,  $\{(\mathcal{X}_i(t), Y_i)\}_{i=1}^n$  distribuidos como el par  $(\tilde{\mathcal{X}}(t), Y)$ , para  $t \in T$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}(t) \in E$  e  $Y \in \mathbb{R}$ . Para  $\{k_n\}$  ( $k_n/n < |T|$ ), una sucesión de números reales que tiende a infinito, definimos la variable aleatoria  $H_{n,\mathcal{X}}$  tal que, los procesos  $\{\mathcal{X}_1(t), \dots, \mathcal{X}_n(t)\}$  vivan en la banda  $[\mathcal{X}(t) - H_{n,\mathcal{X}}, \mathcal{X}(t) + H_{n,\mathcal{X}}]$ ,  $k_n$  del tiempo. Esto es,

$$k_n = \sum_{i=1}^n \int_T \mathbb{I}_{\{t: |\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_i(t)| \leq H_{n,\mathcal{X}}\}} dt = \sum_{i=1}^n d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}),$$

donde

$$d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}) \doteq \int_T \mathbb{I}_{\{t: |\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_i(t)| \leq H_{n, \mathcal{X}}\}} dt.$$

Definimos el estimador del operador de regresión  $r$  como sigue

$$\begin{aligned} \hat{r}(\mathcal{X}) &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \int_T \mathbb{I}_{\{t: |\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_i(t)| \leq H_{n, \mathcal{X}}\}} dt}{\sum_{i=1}^n \int_T \mathbb{I}_{\{t: |\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_i(t)| \leq H_{n, \mathcal{X}}\}} dt} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X})}{\sum_{i=1}^n d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X})} \\ &= \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^n Y_i d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}). \end{aligned}$$

Para este estimador estudiamos propiedades asintóticas y presentamos aplicaciones a conjuntos de datos reales. Además, presentamos un método de discriminación (clasificación no supervisada) funcional basado en regresión y aplicamos dicho método a conjuntos de datos reales.

---

**Autores:** Ana M. Bianco y Paula M. Spano  
**Lugar:** CONICET - Universidad de Buenos Aires  
**Expositor:** Paula M. Spano

---

Una propuesta de estimación robusta en modelos parcialmente lineales con errores en las variables

En este trabajo, consideraremos modelos parcialmente lineales, que representan una alternativa más flexible que el modelo lineal ya que tienen una componente paramétrica y otra no paramétrica. Este enfoque permite abordar relaciones complejas entre las variables, capturando características inusuales o inesperadas de la relación entre las mismas.

Más precisamente, suponemos que se observa una muestra de tamaño  $n$  donde  $(Y_i, \mathbf{X}_i', T_i)'$ , con  $i = 1, \dots, n$ , son observaciones independientes,  $Y_i \in \mathbb{R}$ ,  $T_i \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})' \in \mathbb{R}^p$  e

$$Y_i = \beta' \mathbf{X}_i + g(T_i) + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

siendo los errores  $\varepsilon_i$  independientes, idénticamente distribuidos e independientes de  $(\mathbf{X}_i', T_i)'$ . En particular, estudiaremos a estos modelos en el caso en que las covariables de la componente paramétrica son observadas con error. Es decir, en lugar de observar  $\mathbf{X}_i$ , observamos

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{U}_i \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde los errores  $\mathbf{U}_i$  son independientes, idénticamente distribuidos e independientes de  $(Y_i, \mathbf{X}'_i, T_i, \varepsilon_i)'$ . En el modelo clásico se supone, además, que  $E(\varepsilon_i) = 0$ ,  $V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon$  y que  $E(\mathbf{U}_i) = \mathbf{0}$ ,  $\Sigma_{\mathbf{U}_i} = \sigma_{\mathbf{U}} \mathbf{I}_p$ .

Las propuestas existentes para este modelo son sensibles a la presencia de datos anómalos en tanto se basan en mínimos cuadrados. Nuestro objetivo es introducir estimadores robustos consistentes de las componentes paramétrica y no paramétrica de un modelo parcialmente lineal con errores en las variables bajo condiciones generales.

A tal fin, proponemos un procedimiento de tres pasos, estudiamos la consistencia de los estimadores resultantes y mediante un estudio de Monte Carlo analizamos la performance de los mismos en muestras pequeñas, tanto contaminadas como sin contaminar.

---

**Autores:** Stella Maris Donato, Jorge Gabriel Adrover

**Lugar:** ICB-Universidad Nacional de Cuyo y CONICET. FAMA-Universidad Nacional de Córdoba, CIEM y CONICET

**Expositor:** Stella Maris Donato

---

#### Métodos robustos para correlaciones canónicas

Correlaciones canónicas es un método que se utiliza para relacionar las variables en dos grupos. En general, esta metodología se usa cuando un conjunto de variables multivariantes puede dividirse en dos grupos homogéneos y se desea identificar y cuantificar la relación entre ambos conjuntos de variables. Clásicamente el análisis canónico se realiza obteniendo las combinaciones lineales de cada subconjunto de variables que maximizan su correlación. Sin embargo, se conoce que esta metodología es muy sensible a observaciones atípicas y en consecuencia es necesario tener alternativas robustas para realizar las estimaciones. En este trabajo se presenta una propuesta robusta y se analizan distintas metodologías robustas existentes para obtener las estimaciones de las correlaciones y variables canónicas. La performance de los distintos estimadores en consideración es comparada a través de un estudio de simulación.

**Conferencia Invitada**

**Patricia Giménez**

**Departamento de Matemática. FCEYN. Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

Geometría riemanniana e influencia local en modelos de regresión

Bajo condiciones de regularidad estándares, una estructura riemanniana puede ser introducida para una familia paramétrica de distribuciones, donde el tensor métrico es dado por la matriz de información de Fisher y determina la geometría toda cuando la conexión métrica inducida es usada. Este tipo de estructura geométrica puede utilizarse para el estudio de influencia local de pequeñas perturbaciones en un modelo estadístico. Cuando un vector de perturbación, introducido para perturbar la densidad de los datos observados, causa un gran efecto, resulta importante conocer la causa (por ejemplo, observaciones influyentes o invalidez de los supuestos del modelo). Luego, es de relevancia el desarrollo de métodos estadísticos para cuantificar este efecto. Como alternativa al enfoque basado en el concepto de curvatura normal de un gráfico de influencia, propuesto por Cook (1986), recientemente se ha utilizado una estructura de variedad riemanniana para caracterizar la densidad del modelo perturbado como función del vector de perturbación. En este contexto, el tensor métrico juega un rol relevante en la selección de perturbaciones apropiadas. Luego, dada una función objetivo que represente el aspecto de inferencia de interés, medidas de influencia de primer y segundo orden pueden ser definidas a partir de los términos correspondientes del desarrollo en serie de Taylor, en una versión covariante. Para una amplia clase de modelos y situaciones, los resultados de este enfoque coinciden con el más difundido basado en la curvatura normal. Sin embargo, modelos mixtos, heteroscedásticos o con réplicas son ejemplos de situaciones donde el método de Cook puede conducir a conclusiones incorrectas.

En esta charla mostramos la aplicación de conceptos básicos de geometría riemanniana en el estudio de influencia local. Presentamos las características relevantes del enfoque que resuelven algunas de las limitaciones del método basado en el cálculo de la curvatura normal. Por otra parte, describimos cómo el cálculo de las cantidades geométricas requeridas puede realizarse cuando interesa el estudio de influencia local sobre métodos de estimación que no son basados en la verosimilitud de los datos observados, para modelos de regresión con errores en las variables.



# Física Matemática

*Organizan:*

*Javier Fernández, Osvaldo Santillán*



**Conferencia Invitada**

**Sebastián Ferraro**

**Departamento de Matemática, UNS; CONICET**

---

Dinámica y control impulsivo de una bola simétrica no homogénea

Una bola material con dos de sus tres momentos de inercia iguales y cuyo centro de masa coincide con su centro geométrico se denomina una bola simétrica. Consideramos que la misma rueda sobre un plano horizontal, sin deslizarse ni girar sobre su eje vertical (lo que se denomina usualmente “rubber rolling”). Veremos que su dinámica libre se rige por ecuaciones de movimiento que resultan equivalentes a una ODE en  $S^2 \times S^1$  [1], y que estas ecuaciones se pueden resolver explícitamente. También expondremos una estrategia para el control de la posición y orientación de la bola mediante impulsos (impactos elásticos) aplicados a la misma. Estudiaremos la velocidad de convergencia del algoritmo usando un enfoque geométrico, en términos de la curvatura de una conexión apropiada en un fibrado principal.

H. Cendra and M. Etchechoury. Rolling of a symmetric sphere on a horizontal plane without sliding or spinning. *Rep. Math. Phys.*, 57(3):367–374, 2006.

Este trabajo se hizo en colaboración con Hernán Cendra y María del Rosario Etchechoury.

---

**Autores: Leonardo Colombo**

**Lugar: Departamento de Matemática-UNLP**

**Expositor: Leonardo Colombo**

---

Quasivelocidades y Control Óptimo de Sistemas Mecánicos

En ingeniería es frecuente encontrarse con sistemas que requieren un control si queremos que sigan un comportamiento adecuado o una planificación pre-fijada. En el caso de vehículos, los controles nos permiten frenarlo, acelerarlo, llevarlo por la dirección requerida... Estos controles se activan manualmente, por radio control o automáticamente, o los diseña nuestro sistema (vía feedback). Pueden actuar llevando nuestro sistema de un punto a otro o evitando desviaciones de la trayectoria que queremos seguir. En otros casos el sistema es inestable y necesitamos introducir controles para evitar grandes perturbaciones del sistema.

---

La aplicación no se reduce a problemas de mecánica si no que tienen un ámbito mayor de aplicación: teorías del crecimiento económico, ecología, planificación comercial, medicina, robótica. . .

Nos centraremos más en detalle en utilizar aquel control que sea “más beneficioso” para nosotros: nos permita llegar en mínimo tiempo, nos resulte más barato, consuma menos combustible, más saludable... En este caso, elegiremos entre los controles admisibles (si estos existen) aquel que minimice o maximice un cierto funcional. En definitiva debemos utilizar el control que consideramos óptimo.

En particular, nos interesan el control de sistemas mecánicos infractuados; que están caracterizados por tener menos controles que grados de libertad. Estudiaremos estos sistemas como sistemas lagrangianos de orden superior sujetos a las ligaduras inducidas, al ser el sistema infractuado. Para despejar los controles y sustituirlos en la función de coste, usaremos la técnica de quasi-coordenadas, o el uso de bases móviles, es decir, encontraremos una base de campos de vectores adaptada al sistema de control. Las técnicas diseñadas se pueden extender a otros espacios de fases, como sistemas de control infractuados definidos en álgebras de Lie. Motivado por el control de satélites y como test de nuestros desarrollos teóricos, estudiaremos el problema de controlar un cuerpo rígido, llevándolo desde un estado inicial a uno final en el menor tiempo posible y minimizando un funcional de coste. Otra utilidad futura de nuestros desarrollos, es la posibilidad de diseñar métodos numéricos geométricos para problemas de control infractuados y la posible extensión a problemas en fibrados de Atiyah y la introducción de ligaduras noholonomas y fuerzas externas.

---

**Autores: Leonardo Colombo, David Martín de Diego, Marcela Zuccalli**  
**Lugar: Depto. Matemática UNLP - ICEMAT - Depto. de Matemática UNLP**  
**Expositor: Marcela Zuccalli**

---

Sobre la discretización de problemas de control óptimo de sistemas  
mecánicos infractuados

Un sistema mecánico lagrangiano de control es infractuado si las variables de control son menos que la dimensión del espacio de configuraciones. Su descripción se realiza sobre una variedad diferenciable producto  $Q = Q_1 \times Q_2$  tales que las fuerzas de control  $u^a$  se aplican solamente a las coordenadas  $q^a$  de  $Q_1$  mientras que las coordenadas  $q^\alpha$  de  $Q_2$  quedan libres. Si  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$

es el lagrangiano del sistema, las ecuaciones de Euler Lagrange están dadas por

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} &= u^a \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

donde  $a = 1, \dots, r$  and  $\alpha = r + 1, \dots, n$ .

Este sistema define un problema de control óptimo que consiste en encontrar la trayectoria  $(q^a(t), q^\alpha(t), u^a(t))$  con condiciones iniciales y finales  $(q^a(t_0), q^\alpha(t_0), \dot{q}^a(t_0), \dot{q}^\alpha(t_0)), (q^a(t_f), q^\alpha(t_f), \dot{q}^a(t_f), \dot{q}^\alpha(t_f))$  respectivamente, para minimizar el funcional costo

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_f} C(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, u^a) dt.$$

Como puede verse en [3], bajo cierta hipótesis de regularidad, este problema de control óptimo es equivalente al problema variacional vakónomo de orden 2 que consiste en extremizar la acción

$$\tilde{\mathcal{A}} = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{L}(q^a(t), q^\alpha(t), \dot{q}^a(t), \dot{q}^\alpha(t), \ddot{q}^a(t), \ddot{q}^\alpha(t)) dt$$

sujeta a los vínculos

$$\Phi^\alpha(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, \ddot{q}^a, \ddot{q}^\alpha) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \text{con } \alpha = r + 1, \dots, n$$

donde  $\tilde{L} : T^{(2)}Q \rightarrow \mathbb{R}$  está dado por

$$\tilde{L}(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, \ddot{q}^a, \ddot{q}^\alpha) = C \left( q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} \right).$$

Para tratar este problema vakónomo de orden 2 se puede adaptar la formulación geométrica que hacen Skinner y Rusk para sistemas de primer orden (ver [5] [4]). Esta formulación permite determinar una condición necesaria y suficiente para garantizar la solución del problema de control óptimo equivalente.

En general, las ecuaciones diferenciales que hay que resolver para determinar las variables de control pueden ser complejas. Es por ésto que resulta de interés encontrar algún integrador que resuelva el problema.

En este trabajo consideramos un sistema lagrangiano de control infractuado y su discretización. A partir de este sistema discreto de control infractuado describimos el problema de control óptimo que él define y analizamos

cómo la solución de este problema de control óptimo está dada por la solución del problema vakónomo discreto de orden 2 equivalente.

En particular, consideraremos la discretización del sistema dado por un péndulo invertido.

R. Benito, D. Martín de Diego: *Discrete vakonomic Mechanics*. Journal of Mathematical Physics 46 (8).

R. Benito, M. de León, D. Martín de Diego: *Higher order discrete Lagrangian mechanics*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 3, No. 3 (2006), 421-436

A.M. Bloch: *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics Series, 24, Springer-Verlag, New York (2003).

L. Colombo, D. Martín de Diego, M. Zuccalli: *Optimal control of Underactuated Mechanical Systems: A geometric approach*. Journal of Mathematical Physics (se publicará en julio de 2010)

Skinner R., Rusk. 1983. Generalized Hamiltonian dynamics I. Formulation on  $T^*Q \oplus TQ$ . *Journal of Mathematical Physics*, 24(11), 2589-2594 and 2595-2601 .

---

**Autores: Santiago Capriotti**  
**Lugar: Universidad Nacional del Sur**  
**Expositor: Santiago Capriotti**

---

#### Sistemas AKS y problemas variacionales no estándar

Los sistemas AKS [BP94, Ova03] constituyen ejemplos de sistemas mecánicos integrables cuyos espacios de fases son órbitas en el dual del álgebra de Lie de un grupo factorizable. Versiones hamiltonianas de dichos sistemas pueden hallarse en la literatura desde hace tiempo (por ejemplo, [RST579, RST581]), y dichos sistemas se vinculan con sistemas mecánicos definidos sobre el cotangente del grupo de Lie en cuestión mediante reducción. Menos conocidas son las versiones lagrangianas para estos sistemas; un ejemplo en esta dirección es el trabajo [FG02], en el cual se establece la equivalencia entre las descripciones lagrangianas y hamiltonianas a nivel de ecuaciones de movimiento. La dificultad en la demostración de la equivalencia entre las dos versiones reside en el hecho de que el lagrangiano provisto por los autores en esta referencia es singular, conteniendo multiplicadores de Lagrange encargados de inducir vínculos a nivel de las velocidades.

Utilizando un problema variacional que incluye tales vínculos en la geometría del problema, en lugar de hacerlo en el lagrangiano, estudiaremos la vinculación entre las dos descripciones para un sistema AKS desde una perspectiva novedosa, utilizando para ello la noción de problema variacional

Lepage-equivalente. Ello nos permitirá, entre otras cosas, utilizar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds [GNH78] para construir la versión hamiltoniana usual del sistema AKS como teoría hamiltoniana asociada.

F. E. Burstall y F. Pedit. Harmonic maps via Adler–Kostant–Symes theory. In A. P. Fordy and J. C. Wood, editors, *Harmonic maps and integrable systems*, volume 23 of *Aspects of Math.*, pages 221–272. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.

L. Fèher y A. Gabor. Adler–Kostant–Symes systems as lagrangian gauge theories. *Physics Letters A*, 301:58, 2002.

M.J. Gotay, J. M. Nester, y G. Hinds. Presymplectic manifolds and the Dirac–Bergmann theory of constraints. *J. Math. Phys.*, (19):2388, 1978.

Gabriela Ovando. Invariant metrics and hamiltonian systems. *preprint arXiv:math/0301332*, 2003.

A. G. Reyman y M. A. Semenov–Tian–Shansky. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. *Invent. Math.*, 54:81–100, 1979.

A. G. Reyman y M. A. Semenov–Tian–Shansky. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. II. *Invent. Math.*, 63:423–432, 1981.

---

### Conferencia Invitada

**J. Devoto**

**ITBA, Departamento de Matemática, FCEyN, UBA**

---

### D-branas y variedades de Frobenius

Graeme Segal y Gregory Moore defínieron de un modo riguroso la noción de categorías de D-branas asociada al sector abierto de una teoría topológica de campos y caracterizaron la categoría maximal de branas en términos de fibrados vectoriales sobre un espacio-tiempo finito. En nuestro trabajo conjunto con Anibal Amoreo generalizamos estos resultados al caso de familias de teorías conformes de campos modeladas por variedades de Frobenius. En este caso no solo aparecen fibrados vectoriales usuales y fibrados vectoriales torcidos correspondientes a módulos sobre álgebras de Frobenius.

[1] G. Segal and G. Moore "D-branes and K-theory in 2D topological field theory" hep-th/0609042.

**Conferencia Invitada**

**O. Santillán**

**Departamento de Matemática, FCEyN**

---

**Modelos juguete de teorías topológicas de campo**

En esta charla se presentarán ciertos modelos juguete que ejemplifican las características principales de las teorías topológicas de campo: el principio de localización, el rol de la supersimetría o invariancia BRST y invariancia topológica de las funciones de correlación. La charla está dirigida a una audiencia no especialista en el tema. Al final se mencionarán en forma muy breve algunas teorías topológicas concretas como la versión doblada de super-yang-mills con  $N=2$  supersimetrías, gravedad topológica en dos dimensiones y Chern-Simons, las cuales están asociadas a los invariantes de Donaldson, a las clases de intersección de Morita-Miller y a los invariantes de nudos respectivamente.

[1] Kentaro Hori. Sheldon Katz. Albrecht Klemm. Rahul Pandharipande. Richard Thomas. Cumrun Vafa. Ravi Vakil. Eric Zaslow "Mirror symmetry" vol 1 of Clay Mathematical Monographs AMS Providence RI 2003.

[2] Marcos Mariño, "Enumerative geometry and knot invariants", hep-th/0210145.

---

**Autores: Teresita A. Rojas (1), (2), Melina Bordcoch (1), Jose Luis Nieva 1), Mario Andres Bizzotto (1)**

**Lugar: (1) Universidad Nacional de Catamarca, (2) CONICET**

**Expositor: Mario Andres Bizzotto**

---

**Espacios de Einstein Conforme en el Formalismo de Superficies Nulas**

En este trabajo se analizarán las transformaciones conformes en variedades de dimensión  $n=4$ , considerando las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea conforme a un espacio de Einstein. A partir de esto se encuentra que la anulación de un único tensor es la condición necesaria y suficiente para que una métrica sea conforme Einstein. Por otro lado, en el contexto del Formalismo de Superficies Nulas (NSF), dichas superficies están caracterizadas por una función que depende de los puntos del espacio-tiempo y de puntos sobre la esfera de direcciones nulas cuyas coordenadas son las coordenadas estereográficas complejas. El gradiente de esta función forma un vector nulo sobre la variedad, a partir del cuál se pueden calcular todas las componentes de la métrica y escribirlas con el fin de calcular el tensor de Weyl en términos de sus componentes y a partir de éste al tensor en términos

de la función . De este modo se obtiene las condiciones para que una métrica sea conforme Einstein en el NSF.

---

**Autores: J.P. Borgna, D.F. Rial**

**Lugar: Univ. de Gral Sarmiento, Depto. Matemática Univ. de Buenos Aires**

**Expositor: J.P. Borgna**

---

Existencia de estados fundamentales para la ecuación 1D de Schrödinger Relativista

En la década de 1920 se fue afianzando la cada vez más aceptada Mecánica Cuántica. Erwin Schrödinger formuló la ecuación lineal que describe la dinámica de una partícula, y pocos años después toda la teoría fue estructurada por Von Neumann y otros. Pero al mismo tiempo la Teoría General de la Relatividad había sido constatada experimentalmente (1922), y en este contexto diversos científicos se preguntaron por los puntos de contacto entre ambas teorías y, sobre todo, se prestó atención a fenómenos que lindan entre la Cuántica y la Relatividad Especial (formulada en 1905 por Albert Einstein).

Un primer problema que debieron afrontar fue el de hallar una ecuación que describiera la dinámica de una partícula cargada que se mueve a una velocidad muy alta, podríamos decir cercana a la de la luz. Usando una sencilla traducción del momento lineal en cuántica y de la energía cinética en relatividad, obtuvieron la ecuación Relativista de Schrödinger, que en su misma naturaleza es pseudo-diferencial, lo que resultó muy difícil de manejar para los físicos-matemáticos de esa época. Por esta razón en ese momento se buscó una simplificación de la misma, la que dio origen a la ecuación de Dirac.

En los últimos años se ha regresado a la formulación pseudo-diferencial original, en gran medida porque en los últimas cuatro décadas la matemática avanzó lo suficiente en el tratamiento, desde varios puntos de vista, de los operadores pseudo-diferenciales.

La ecuación unidimensional de Schrödinger Relativista está dada por

$$i\psi_t(t, x) = \left( \sqrt{m^2 - \partial_x^2} - m \right) \psi(t, x) - V'(x, \psi) \psi$$

Por consideraciones físicas, los estados fundamentales de este tipo de ecuaciones deben ser del tipo “impulsados” (en inglés “boosted”) porque al estar en el terreno de la teoría de la relatividad, deben ser invariantes Lorentz. Por esta razón se buscan soluciones de la forma

$$\psi(t, x) = \varphi(x - vt) e^{i\mu t}$$

siendo  $\mu \in \mathbb{R}$  un parámetro de fase y  $v$  la velocidad de la partícula, bajo la normalización  $c = 1$  ( $c$  la velocidad de la luz).

Los trabajos previos existentes (J. Frölich, 2007) acerca de la existencia de estados fundamentales de este tipo de ecuaciones, se refieren al caso en que el potencial no lineal  $V'$  es del tipo Hartree (convolución contra un núcleo singular). Nosotros adaptamos estas técnicas al caso de una no linealidad cúbica, es decir  $V' = |\psi|^2$ . Se usa de manera adecuada el principio de concentración-compacidad de J.P. Lions.

---

**Autores: Romina Ramírez, Gerardo Rossini, Marcela Sanmartino**

**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**

**Expositor: Romina Ramírez**

---

### Operadores Toeplitz con símbolo radial

Utilizando el isomorfismo existente entre el espacio de Fock  $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$  de las funciones holomorfas de cuadrado integrable respecto de la medida gaussiana y el espacio  $l_2$  de las sucesiones cuadrado sumables, mostraremos como los operadores de Toeplitz con símbolos radiales  $\varphi = \varphi(|z|)$  y dominio denso en  $F^2$  se simplifican drásticamente, mapeándose en operadores diagonales sobre  $l^2$ . Analizaremos condiciones suficientes y/o necesarias para que un operador Toeplitz se mapee en un operador diagonal en  $l^2$ , y la situación inversa.

Como aplicación, estudiaremos el problema abierto de la composición de operadores Toeplitz. Presentaremos una familia de símbolos radiales para los cuales la composición de sus respectivos operadores Toeplitz resulta nuevamente un operador bien definido de este tipo. Como complemento, ilustraremos la situación con ejemplos bien conocidos en Mecánica Cuántica, contexto natural de todo este trabajo.

[1 ] F. A. Berezin, *Covariant and contravariant symbols of operators*, Math. USSR Izv. vol 6, pp 1117-1151 (1972).

[2 ] S. Grudsky, N. Vasilevski, "Toeplitz operators on the Fock space: Radial component effects." *Integral Equations and Operator Theory*, v. 44, no. 1, 2002, p. 10-37

[3 ] L.A Coburn "On the Berezin -Toeplitz Calculus" *Proceedings of the AMS* 129 (2001) pp. 3331-3338.

**Conferencia Invitada**  
**H. Falomir**  
**Departamento de Física, FCE, UNLP**

---

Funciones Espectrales de Operadores Diferenciales con Coeficientes Singulares

La función  $\zeta_D(s) := \text{Tr } D^{-s}$  asociada a las extensiones autoadjuntas de un operador diferencial de la forma  $D = -\partial_x^2 + (\nu^2 - 1/4)x^{-2}$ , que presenta un término de orden cero singular en el origen, no sigue el comportamiento general que resulta de la teoría de Seeley para las trazas de potencias complejas de operadores elípticos con coeficientes regulares (cuyas singularidades son polos simples que solo dependen del orden del operador diferencial y de la dimensión de la variedad).

En efecto, mostramos que esas funciones espectrales presentan polos simples en valores que dependen del coeficiente del término singular (del parámetro  $\nu$ ), con residuos determinados por la extensión autoadjunta considerada. Las excepciones a este comportamiento son las extensiones autoadjuntas con dominios (localmente) invariantes de escala.

Este comportamiento se traduce, para una extensión autoadjunta genérica de ese operador, en la aparición de potencias de  $t$  dependientes del parámetro  $\nu$  en el desarrollo asintótico de la traza del "heat-kernel",  $\text{Tr } e^{-tD}$ .

[1] H. F., M.A. Muschietti, P.A.G. Pisani and R. Seeley, J. Phys. A36: 9991-10010, 2003.

[2] H. F., M.A. Muschietti and P.A.G. Pisani, J. Math. Phys. 45: 4560-4577, 2004.



# Geometría

*Organizan:*

*Eduardo Hulett y Carlos Olmos*



**Conferencia Invitada**

**Gabriel Larrotonda**

**Instituto de Ciencias de la Universidad Nacional de General Sarmiento**

---

Variedades de curvatura no positiva

La noción de curvatura seccional no positiva, en el contexto Riemanniano, puede presentarse de formas que no involucran el producto interno de la variedad. Una de ellas, puramente métrica y debida a Alexandrov, tiene que ver con las nociones de comparación de triángulos geodésicos. La otra, debida a Grossman y McAlpin, se relaciona con el espectro del operador  $d\exp$ , que no es otra cosa que la diferencial de la exponencial de la variedad. Veremos como estas nociones resultan transferibles a contextos no Riemannianos: la primera en espacios de métrica interior, y la segunda en variedades de Banach-Finsler. En esta charla veremos como algunos resultados clásicos (del contexto Riemanniano) se transfieren a espacios de estas clases recién mencionadas, sin limitaciones de dimensión.

---

**Conferencia Invitada**

**Oswaldo Santillán**

**Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires**

---

Killing-Yano tensors y  $w$ -álgebras

Se discutirán propiedades generales de los tensores de Killing-Yano y su aplicación en el contexto de simetrías  $W$  en modelos sigma supersimétricos. Se describirá su relación con las llamadas simetrías exóticas.

**Autores:** Carlos Olmos - Silvio Reggiani

**Lugar:** Universidad Nacional de Córdoba - Facultad de Matemática, Astronomía y Física

**Expositor:** Silvio Reggiani

---

La unicidad de la conexión canónica en espacios naturalmente reductivos

En trabajos previos estudiamos la unicidad de la conexión canónica en espacios naturalmente reductivos compactos. En particular, a partir de este resultado uno determina completamente el grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto. En efecto, sea  $M$  un espacio naturalmente reductivo compacto y sea  $\nabla^c$  la conexión canónica asociada (a una cierta descomposición reductiva). Asumamos que  $M$  es localmente irreducible y que no es globalmente isométrico a la esfera  $S^n$ , al espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^n$ , ni a un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Entonces  $\nabla^c$  es única.

Recientemente hemos extendido este resultado al caso no compacto. Más precisamente, si  $M$  es un espacio naturalmente reductivo no compacto, simplemente conexo, localmente irreducible y no globalmente isométrico al dual simétrico de un grupo de Lie compacto, entonces la conexión canónica es única. Más aún, para el dual de la esfera, el espacio hiperbólico  $H^n$ , existe una única descomposición naturalmente reductiva.

El enfoque de este trabajo es puramente geométrico y las pruebas de nuestros resultados principales se basan en un resultado de descomposición para espacios naturalmente reductivos y en un teorema tipo Berger, el Skew-torsion Holonomy Theorem, que también probamos geoméricamente.

---

**Autores:** Alfredo H. González

**Lugar:** FaMAF-CIEM Universidad Nacional de Córdoba

**Expositor:** Alfredo H. González

---

Estructuras de Poisson en el fibrado cotangente de un Grupo de Lie

El álgebra de Lie cotangente  $T^*\mathfrak{g}$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se define como el producto semidirecto  $T^*\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \ltimes_{\text{coad}} \mathfrak{g}^*$ , donde  $\text{coad}$  es la representación coadjunta de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{g}^*$ . Si  $G$  denota el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , el fibrado cotangente  $T^*G$  tiene una estructura natural de grupo de Lie tal que su álgebra de Lie es  $T^*\mathfrak{g}$ . Existe una métrica ad-invariante canónica

---

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  de signatura neutral en  $T^*\mathfrak{g}$  definida por:

$$\langle (x, \alpha), (y, \beta) \rangle = \alpha(y) + \beta(x),$$

para  $x, y \in \mathfrak{g}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$ . Según un resultado de [1], cada estructura compleja en  $T^*\mathfrak{g}$  antisimétrica con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  determina una estructura de Poisson multiplicativa en  $T^*G$ .

En el presente trabajo consideramos las estructuras de Poisson multiplicativas en el fibrado cotangente de grupos de Lie de dimensiones bajas, partiendo de las estructuras complejas obtenidas en [2]. Estudiamos también el problema de linealización de dichas estructuras y propiedades de las foliaciones simplécticas.

A. Andrada, M. L. Barberis, G. Ovando, *Lie bialgebras of complex type and associated Poisson Lie groups*, Journal of Geometry and Physics **58** (2008) 1310-1328.

L. C. de Andres, M. L. Barberis, I. Dotti, M. Fernandez, *Hermitian structures on cotangent bundles of four dimensional solvable Lie groups*, Osaka J. Math. **44** (4)(2007) 765-793.

---

**Autores: Jorge Lauret y David Oscari**

**Lugar: FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba**

**Expositor: David Oscari**

---

#### Solitones de Ricci en grupos de Lie 2-pasos nilpotentes no singulares

La clasificación de los grupos de Lie nilpotentes que admiten una métrica Riemanniana invariante a izquierda solitón de Ricci (i.e. puntos fijos del flujo de Ricci) es todavía un problema abierto, y no se conoce ninguna condición algebraica suficiente (ver [L1]). Todo parece indicar que dicha clasificación es la parte sustancial para el entendimiento de todas las variedades homogéneas solitones de Ricci (ver [L2]).

Se describirán algunos resultados de existencia y de no existencia en el caso 2-pasos nilpotente no singular, el cual ha mostrado relevancia en varios contextos geométricos [E] y algebraicos [LT]. Hemos obtenido una clasificación completa para centro 2-dimensional, y una curva explícita que no admite solitón en toda posible dimensión. También se han encontrado varias familias de ejemplos explícitos para centro 3-dimensional. La teoría de polinomios positivos y sus invariantes juega un importante papel en este problema.

P. Eberlein, *Geometry of two-step nilpotent Lie groups with a left invariant metric II*, Trans. Amer. Math. Soc. **343**, 805-828 (1994).

J. Lauret, *Einstein solvmanifolds and nilsolitons*, Cont. Math. **491** (2009).

J. Lauret, Ricci soliton solvmanifolds, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, en prensa.

F. Levstein y A. Tiraboschi, Classes of 2-step nilpotent Lie algebras, *Comm. in Alg.*, 27(5), 2425-2440 (1999).

---

**Autores:** Viviana del Barco, Isabel Dotti

**Lugar:** FCEIA - Univ. Nac. de Rosario, FAMAF - Univ. Nac. de Córdoba.

**Expositor:** Viviana del Barco

---

### Estructuras simplécticas en nilvariedades

Una nilvariedad es una variedad homogénea compacta  $M = N/\Gamma$ , donde  $N$  es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo y  $\Gamma$  un subgrupo discreto. El teorema de Nomizu brinda una herramienta para calcular la cohomología de De Rham de las mismas, estableciendo un isomorfismo entre la cohomología de  $M$  y la cohomología del álgebra de Lie  $\mathfrak{n}$  del grupo de Lie  $N$ .

En una variedad  $M$  de dimensión par  $2n$ , una estructura simpléctica es una 2-forma diferenciable  $\omega$  cerrada y tal que  $\omega^n \neq 0$ . En el caso que  $M$  es una nilvariedad, hallar una estructura simpléctica en  $M$  equivale a encontrar  $\omega \in \Lambda^2 \mathfrak{n}^*$  tal que  $d\omega = 0$  y  $\omega$  sea no degenerada vista como forma bilineal y antisimétrica en  $\mathfrak{n}$ . Existen obstrucciones cohomológicas para que el álgebra (o la nilvariedad) admita una tal estructura. Presentaremos en este trabajo nuevas obstrucciones. Trabajaremos a nivel de álgebras de Lie nilpotentes.

Las álgebras de Lie nilpotentes tienen asociadas naturalmente una filtración de  $\mathfrak{n}^*$  que da origen a una sucesión espectral  $E_r^{p,q}$ ; la misma converge a la cohomología  $H^*(\mathfrak{n})$ . Llamamos al límite de la sucesión espectral *cohomología intermedia del álgebra de Lie*. En particular, el segundo grupo de cohomología de  $\mathfrak{n}$  se descompone como suma de espacios vectoriales:

$$H^2(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{p+q=2, p \geq 0} E_{\infty}^{p,q}.$$

Estudiando esta nueva cohomología determinamos una condición necesaria para que un álgebra de Lie nilpotente sea simpléctica. Se prueba además que en las álgebras de tipo H esta condición también resulta suficiente. Sin embargo analizando las álgebras dos pasos nilpotentes asociadas a grafos concluimos que la condición no es suficiente en general.

**Conferencia Invitada**  
**Adrián Andrada**  
**CIEM-FaMAF**

---

Estructuras complejas abelianas en grupos de Lie y aplicaciones a la geometría

Una *estructura compleja abeliana* es una estructura compleja invariante a izquierda  $J$  en un grupo de Lie que satisface la siguiente propiedad:  $[JX, JY] = [X, Y]$  para todo par  $X, Y$  de campos vectoriales invariantes a izquierda en el grupo. Estas estructuras, que sólo pueden encontrarse en grupos de Lie 2-pasos solubles, poseen interesantes propiedades y aplicaciones a la geometría diferencial. En esta ocasión repasaremos algunas de estas propiedades y mostraremos nuevas relaciones con la geometría de Kähler y la geometría sasakiana.

---

**Conferencia Invitada**  
**Ricardo Podestá**  
**CIEM-FaMAF**

---

Teoría espectral del operador de Atiyah-Patodi-Singer en variedades compactas planas

Consideramos el operador diferencial de tipo-Dirac  $\mathcal{D}$  definido y estudiado por Atiyah, Patodi y Singer en [1]. Éste es el operador de borde asociado al operador de signatura actuando en  $2p$ -formas suaves,  $0 \leq p \leq 2k - 1$ , de una variedad Riemanniana orientable y compacta  $M$  de dimensión  $n = 4k - 1$ . Como todo operador elíptico,  $\mathcal{D}$  tiene asociada la *serie eta* de sus autovalores no nulos

$$\eta_{\mathcal{D}}(s) = \sum_{0 \neq \lambda \in \text{Spec } \mathcal{D}} \text{signo}(\lambda) |\lambda|^{-s}, \quad \text{Re } s > n.$$

La función holomorfa definida por la serie tiene continuación meromorfa a todo  $\mathbb{C}$  con polos simples en  $\{n, n - 1, n - 2, \dots\}$ . Es un hecho no trivial que el residuo en  $s = 0$  se anula y por lo tanto 0 es un valor regular. El número  $\eta_{\mathcal{D}} := \eta_{\mathcal{D}}(0)$  es un invariante espectral y geométrico, llamado *invariante eta*. En [2], usando el teorema del  $G$ -índice, Harold Donnelly obtiene, de manera indirecta, una expresión general para el invariante eta asociado a  $\mathcal{D}$  para  $G$ -variedades con borde, donde  $G$  es un grupo de isometrías del borde, en términos de ciertas clases características. Esta es una familia muy

grande de variedades. Sin embargo, en el caso particular de variedades planas, la fórmula de Donnelly puede aplicarse en ciertos casos particulares muy específicos y que representan una familia “pequeña” dentro de las variedades planas.

En [3], calculamos el espectro de  $\mathcal{D}$  para una variedad compacta plana arbitraria  $M_\Gamma$ , dando una expresión para las multiplicidades de los autovalores. De esta manera, usando métodos explícitos, obtenemos expresiones para  $\eta_{\mathcal{D}}(s)$  asociada a  $M_\Gamma$  en términos de funciones zeta de Hurwitz. A su vez, esto permite calcular  $\eta_{\mathcal{D}}$  por simple evaluación en  $s = 0$ . Para ciertas familias de variedades compactas planas (i.e. dimensión 3,  $\mathbb{Z}_2^k$ -variedades,  $\mathbb{Z}_p$ -variedades con  $p$  primo impar),  $\eta_{\mathcal{D}}$  puede ser explícitamente calculado. En particular, mostraremos que nuestra fórmula coincide con la obtenida por Donnelly (en los casos en que esta última se aplica).

[1] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, II, III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77**, (43–69) 1975; **78** (405–432) 1975; **79**, (71–99) 1976.

[2] H. Donnelly, *Eta invariants for  $G$ -spaces*. Indiana Univ. Math. J. **27**, 6, (889–918) 1978.

[3] R. J. Miatello, R. A. Podestá, *Spectral theory of the Atiyah-Patodi-Singer operator on compact flat manifolds*, 35 páginas, preprint.

---

**Autores: Roberto Miatello, Ricardo Podestá**

**Lugar: FaMAF (UNC) - CIEM (CONICET)**

**Expositor: Ricardo Podestá**

---

Serie e invariante eta para una familia infinita de variedades con grupo de holonomía cíclico de orden potencias de 2

En [1] estudiamos la teoría espectral del operador de Atiyah-Patodi-Singer  $\mathcal{D}$  en variedades compactas planas de dimensión  $4k - 1$ . Se puede pensar a  $\mathcal{D}$  como la restricción del operador clásico de signatura al borde de una variedad de dimensión  $4k$ .

En la presente comunicación, introduciremos una familia infinita  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{Z}_{2^r}$ -variedades, es decir variedades compactas planas con grupo de holonomía  $F \simeq \mathbb{Z}_{2^r}$ ,  $r > 1$ , y de dimensión arbitraria  $n \equiv 3(4)$ . Para tales variedades, y usando las fórmulas generales dadas en [1], calcularemos explícitamente la serie eta  $\eta_{\mathcal{D}}(s)$  y el invariante eta  $\eta_{\mathcal{D}}$  asociados a  $\mathcal{D}$ , mostrando que resultan no triviales.

Por otra parte, utilizando el teorema del  $G$ -índice, Harold Donnelly ([2]) obtuvo una expresión general (aunque algo complicada), para  $\eta_D$ . En el caso de variedades planas, esta fórmula no siempre resulta de fácil aplicación. Mostraremos que en el caso de la familia  $\mathcal{F}$  esta expresión puede ser usada, y se obtienen idénticos resultados con las fórmulas de [1] y [2]. Para otras familias conocidas de variedades planas, o bien la fórmula de Donnelly no se aplica o bien  $\eta_D = 0$ .

- : [1] Roberto Miatello, Ricardo Podestá, *Spectral theory of the Atiyah-Patodi-Singer operator on compact flat manifolds*, preprint, 36 páginas.
- : [2] Harold Donnelly, *Eta invariants for  $G$ -spaces*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 889 -918.

---

**Autores:** Francisco Vittone, Carlos Olmos  
**Lugar:** Universidad Nacional de Rosario/Córdoba  
**Expositor:** Francisco Vittone

---

Sobre la distribución de nulidad de subvariedades del espacio Euclídeo o de la esfera

Dada una subvariedad Riemanniana  $M$  del espacio Euclídeo o de la esfera, se define el *subespacio de nulidad* (de la segunda forma fundamental) de  $M$  en  $p$  al subespacio

$$\mathcal{N}_p := \{v \in T_p M : \alpha(v, \cdot) = 0\} \subset T_p M$$

donde  $\alpha$  es la segunda forma fundamental de  $M$ . Este subespacio coincide con el núcleo común del operador de forma en todas las direcciones normales de  $M$  y si  $M \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathcal{N}_p$  es el núcleo de la diferencial de la aplicación de Gauss en  $p$ .

La asignación  $p \mapsto \mathcal{N}_p$  define una distribución autoparalela (y por lo tanto integrable) en cada componente conexa de un abierto denso en  $M$ , cuyas variedades integrales son subvariedades totalmente geodésicas de  $M$  y del espacio ambiente. Si además la dimensión de estos subespacios es constante, entonces la distribución, denominada *de nulidad*, está bien definida en todo  $M$ . Mostraremos que si  $M$  es completa, conexa e irreducible, la distribución perpendicular complementaria a  $\mathcal{N}$  en  $M$  es completamente no integrable. Esto es, dos puntos cualesquiera de  $M$  pueden ser unidos por una curva perpendicular a la nulidad en todo punto.

**Autores:** Eduardo Hulett  
**Lugar:** CIEM-FaMAF  
**Expositor:** Eduardo Hulett

---

Inmersiones conformes de superficies de Riemann en  $\mathbb{S}^4$

En este trabajo se considera la geometría de inmersiones conformes de superficies de Riemann en la 4-esfera  $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$  desde un punto de vista twistorial inspirado en las ideas contenidas en los trabajos de Burstall-Rawnsley [B-R] y Eells-Salamon [E-S].

La variedad de banderas  $\mathcal{F} = SO_5/SO_2 \times SO_2$  se identifica con el conjunto de ternas  $(X_0, X_1, X_2)$  de líneas complejas en  $\mathbb{C}^5$  mutuamente ortogonales con el producto interno hermitiano usual, en donde  $X_1, X_2$  generan un subespacio isotrópico maximal y  $X_0$  está generado por un vector real  $u_0 \in \mathbb{R}^5$ , con  $\|u_0\|^2 = 1$ . Si  $\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{2j-1} - iu_{2j})$  es una base unitaria de  $X_j$ ,  $j = 1, 2$ , entonces hay una única elección de  $u_0 \in \mathbb{S}^4$  tal que  $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^5$  positivamente orientada. Esto determina unívocamente una aplicación proyección  $\pi : SO_5/SO_2 \times SO_2 \rightarrow \mathbb{S}^4$  la cual es una submersión riemanniana si en  $\mathcal{F} = SO_5/SO_2 \times SO_2$  fijamos la métrica normal determinada por la forma de Killing de  $so_5$ .

Dada una inmersión conforme  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^4$  definimos su levantamiento a  $\mathcal{F}$  por

$$\hat{f}(p) = (\mathbb{C}f(p), \mathbb{C}[f_z(p)], \mathbb{C}[f_{z\bar{z}}^\perp(p)]), \quad p \in M^2$$

el cual no depende de la coordenada compleja local  $z$  elegida en un entorno de  $p \in M^2$ . En el trabajo se muestra que la aplicación  $\hat{f} : M^2 \rightarrow \mathcal{F}$  codifica invariantes de la geometría de la inmersión  $f$  como la curvatura de la métrica inducida y la curvatura normal. Más específicamente se obtiene la siguiente caracterización de las inmersiones conformes en  $\mathbb{S}^4$  con curvatura media paralela:

*Sea  $M^2$  una superficie de Riemann y  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^4$  una inmersión conforme con vector curvatura media  $H$ . Entonces  $f$  satisface  $\nabla^\perp H = 0$  si y sólo si su levantamiento  $\hat{f} : M^2 \rightarrow (\mathcal{F}, g, \nabla^g)$  es un mapa armónico, donde  $g$  es la métrica normal y  $\nabla^g$  es la conexión de Levi-Civita determinada por  $g$ .*

[B-R] F. Burstall and J. Rawnsley, *Twistor theory for Riemannian symmetric spaces*, LNM Vol. 1424, Springer Verlag, 1990.

[E-S] J. Eells and S. Salamon, *Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 12 (1985), 589-640.

---

**Autores:** Graciela M. Desideri  
**Lugar:** Dto. de Matemática - UNS  
**Expositor:** Graciela M. Desideri

---

Algunas propiedades de la curvatura total central de curvas en el 3-espacio de Lorentz

En este trabajo se presentan propiedades de la curvatura total central a partir de investigar la mencionada curvatura de ciertas curvas no nulas en el 3-espacio de Lorentz. A tal efecto, se consideran curvas geodésicas, curvas temporales Salkowski y anti-Salkowski, evolutas e involutas de curvas temporales, entre otras, y se analizan las curvas planas resultantes de aplicar la proyección central a las mismas. Se obtiene, en cada caso, la correspondiente expresión de la curvatura total central de la curva plana y a partir de ésta, propiedades de la curvatura total central de las curvas en el 3-espacio de Lorentz consideradas en un principio.

---

**Autores:** A. Andrada, M.L. Barberis, I. Dotti  
**Lugar:** FaMAF-CIEM, Universidad Nacional de Córdoba  
**Expositor:** M.L. Barberis

---

Conexiones abelianas en variedades complejas

Dada una estructura casi compleja  $J$  en una variedad  $M$ , una conexión afín  $\nabla$  en  $M$  tal que  $\nabla J = 0$  se dice *abeliana* si la torsión  $T$  de  $\nabla$  es de tipo  $(1, 1)$  con respecto a  $J$ . Demostramos que si  $\nabla$  es una conexión abeliana en  $(M, J)$  entonces  $J$  satisface la condición de integrabilidad  $N \equiv 0$ , donde  $N$  es el tensor de Nijenhuis correspondiente a  $J$ :

$$N(X, Y) := [JX, JY] - [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]),$$

donde  $X, Y$  son campos en  $M$ . Toda variedad hermitiana  $(M, g, J)$  admite una conexión abeliana compatible con  $g$ : en efecto, la primera conexión canónica  $\bar{\nabla}$  introducida en [1] satisface

$$\bar{\nabla}g = 0, \quad \bar{\nabla}J = 0, \quad \bar{T} \text{ es de tipo } (1, 1),$$

en particular,  $\bar{\nabla}$  es abeliana en  $(M, J)$ . Dado un grupo de Lie  $G$  con una estructura compleja abeliana invariante, la conexión  $\nabla$  en  $G$  tal que los campos invariantes a izquierda son paralelos resulta abeliana. Si  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de  $G$ ,  $\nabla$  induce una conexión abeliana en  $\Gamma \backslash G$ .

En el presente trabajo estudiamos el espacio de conexiones abelianas planas en una variedad compleja  $(M, J)$ . Obtenemos el siguiente resultado general:

**Proposición.** Dada una variedad compleja conexa  $(M, J)$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) existe una conexión abeliana con holonomía trivial en  $(M, J)$ ;
- (ii) existen  $n$  secciones  $Z_1, \dots, Z_n$  de  $T^{1,0}M$  que son linealmente independientes en cada punto de  $M$  y tales que  $[Z_i, Z_j] = 0$  para todo  $i, j$ .

Demostramos que si  $\nabla$  es una conexión abeliana con holonomía trivial (y por lo tanto plana) en  $(M, J)$  tal que  $\nabla$  es completa y su torsión es paralela, entonces  $M \cong \Gamma \backslash G$  donde  $G$  es un grupo de Lie con una estructura compleja abeliana invariante a izquierda y  $\Gamma \subset G$  es un subgrupo discreto. Además,  $\nabla$  es la inducida por la conexión en  $G$  cuyos campos paralelos son los invariantes a izquierda. Obtenemos ejemplos de variedades complejas  $(M, J)$  con conexiones abelianas cuya holonomía es trivial que no son de la forma  $M = \Gamma \backslash G$ .

A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Edizioni Cremonese, Roma (1962).

---

**Autores:** Verónica S. Díaz  
**Lugar:** FaMAF-CIEM, Univ. Nac. Córdoba  
**Expositor:** Verónica S. Díaz

---

### Reducción Simpléctica aplicada al fibrado cotangente magnético de un grupo de Lie

Sea  $G$  un grupo de Lie de dimensión finita y  $T^*G$  su fibrado cotangente con la forma simpléctica  $\omega_{\Sigma}$  definida a partir de un dos cociclo  $\Sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de  $G$ . La forma simpléctica  $\omega_{\Sigma}$  se obtiene sumándole a la forma simpléctica canónica en  $T^*G$  un término que involucra a  $\Sigma$ , denominado término magnético. La variedad simpléctica  $(T^*G, \omega_{\Sigma})$  se llama fibrado cotangente magnético.

A partir de variedades simplécticas los métodos de reducción permiten construir nuevas variedades de este tipo; en particular nos interesa el método de reducción óptima, introducido por Ortega y Ratiu [OR1], ya que una de las características más importantes que tiene es que sirve para casos en los que no es posible aplicar la técnica de reducción simpléctica de Marsden y Weinstein. Este es el caso de  $(T^*G, \omega_\Sigma)$  con la acción natural inducida por las traslaciones a izquierda, pues al aparecer el término magnético la acción en general no admite una aplicación momento estándar. En [OR2] se demuestra un teorema de reducción óptima para  $(T^*G, \omega_\Sigma)$ . En este trabajo describiremos variedades simplécticas obtenidas al aplicar este resultado para diferentes grupos de Lie  $G$  y variando el cociclo  $\Sigma$ .

J.-P. Ortega, T.S. Ratiu, *The optimal momentum map*, Geometry, Dynamics, and Mechanics: 60th Birthday Volume for J.E. Marsden. P. Holmes, P. Newton, and A. Weinstein, eds., Springer-Verlag, New York, 2002, arXiv.org:math.SG/0203040.

J.-P. Ortega, T.S. Ratiu, *The reduced spaces of a symplectic Lie group action*, Annals of Global Analysis and Geometry **30** (4) (2006), 335-381.

---

**Autores:** Cristina Egüez, Antonio SÁNGARI, Ana Aramayo

**Lugar:** Universidad Nacional de Salta

**Expositor:** Cristina Egüez

---

#### Aplicación del algoritmo de Koebe a regiones simplemente conexas

El algoritmo de Koebe consiste en generar una sucesión de funciones holomorfas biyectivas que transforma cualquier región propia del plano simplemente conexa  $\Omega$  en el disco unitario abierto  $U$ . El método consiste en la construcción de regiones  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  y de funciones  $f_1, f_2, \dots$ , de modo que  $f_n(\Omega_{n-1}) = \Omega_n$ , y que las funciones  $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$  converjan a una transformación conforme de  $\Omega$  sobre  $U$ .

Se ha implementado el método en forma computacional, aplicando iterativamente la composición de dos transformaciones bilineales y una raíz cuadrada. Se ha observado dificultades en la convergencia del algoritmo, producido por la no holomorfía de la función raíz cuadrática en dominios que contienen el origen.

En este trabajo se ha avanzado con el estudio del algoritmo de Koebe, aplicándolo a varias geometrías de regiones simplemente conexas e investigando la convergencia de la sucesión de funciones construidas para tal fin.

Estudio de la eficiencia y robustez del algoritmo de Koebe. Egeuz, Cristina y Aramayo, Ana. Comunicaciones Científicas. UMA 2008

---

**Autores: F. Alberto Formica, Juan Carlos Bressan**

**Lugar: Universidad Nacional de General Sarmiento-Universidad de Buenos Aires**

**Expositor: F. Alberto Formica**

---

### Operadores de la Convexidad en una Geometría de Coppel con una Topología

Esta comunicación se enmarca dentro de la Convexidad Generalizada y en ella presentamos algunas características de ciertos operadores de frecuente utilización en la teoría de la convexidad como, por ejemplo, el *R-Join*, la *estrella* y las *R-estrellas pasivas y activas* entre otros.

El desarrollo del tema fue realizado en espacios de convexidad topológicos, en este caso una **Geometría lineal densa, extensible y completa** con una topología intrínseca como en [1]. Los resultados que exponemos describen características topológicas de conjuntos definidos a partir de los mencionados operadores en relación con diferentes condiciones de los conjuntos sobre los se aplican.

Presentamos a continuación las definiciones de algunos de los elementos sobre los que trabajaremos y los enunciados de varias propiedades que formarán parte de la comunicación.

Si  $x$  es un punto del espacio  $X$  y  $S$  es un subconjunto de  $X$  el *R-Join* de  $x$  a  $S$  es el conjunto  $J_R(x, S) = \cup\{[x, y > : y \in S\}$ , donde  $[x, y >$  nota a la semirrecta de origen  $x$  que pasa por  $y$ . A su vez, se define la *R-estrella activa de  $x$  a  $S$*  como  $ast_R(x, S) = \{y \in S : [x, y > \subseteq S\}$ . Por otro lado, si  $x \in S$ , la *estrella de  $x$  en  $S$*  es  $st(x, S) = \{y \in S : [x, y] \subseteq S\}$ .

Algunas de las propiedades que presentamos son las siguientes.

- (1) Si  $S$  es un conjunto cerrado y  $x$  es un punto de  $S$  entonces  $st(x, S)$  es un conjunto cerrado.
- (2) Si  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos entonces  $J_R(A, B)$  es un conjunto abierto.
- (3) Si  $S$  es un conjunto cerrado y  $x$  es un punto de  $S$  entonces  $ast_R(x, S)$  es un conjunto cerrado.

- (4)  $x$  es un punto interno de  $S$  si y solo si existe un subconjunto  $S_x$  de  $S$  tal que  $x \in \text{mir}(S_x)$  y además  $J_R(x, S_x) = X$
- (5) Si  $x$  es un punto interno de  $S$  entonces  $J_R(x, S) = X$  y si  $S$  es convexo también vale la recíproca.

[1] Bressan, J. C.: *Topologías intrínsecas en una geometría lineal densa, extensible y completa*, Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, T. XLII (1), 2008, 389-396.

[2] Coppel, W. A.: *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge University Press, 1998.

[3] Formica, A.; Rodríguez, M.: *Properties and relations between visibility and illumination operators*, Revista Notas de Matemática, Vol 3 (2) N° 259, 101-109. Venezuela 2007.

[4] Van de Vel, M. J. L. *Theory of Convex Structures*. North-Holland, Amsterdam. 1993

---

**Autores:** Nicolás Capitelli, Gabriel Minian

**Lugar:** Dpto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

**Expositor:** Nicolás Capitelli

---

### Variedades Combinatorias No Homogéneas

Las variedades combinatorias son el análogo a las variedades topológicas en el contexto PL (lineal a trozos). De sus propiedades locales se derivan importantes resultados que marcaron gran parte del desarrollo de la topología de los últimos cien años. Algunos de los resultados y aplicaciones más relevantes que involucran a las variedades combinatorias incluyen a los teoremas de entornos regulares de Whitehead, la conjetura de Zeeman y su relación con la conjetura (teorema) de Poincaré, el teorema de s-cobordismo y los teoremas clásicos de Newman y Alexander ([2], [4]).

La idea de esta charla es introducir a las Q-variedades, que son poliedros que generalizan a las variedades combinatorias en el caso no homogéneo. Estos objetos verifican muchas propiedades análogas a las de las variedades combinatorias, que permiten, entre otras cosas, extender al caso no homogéneo los conceptos de borde y colapso regular. En particular, se puede definir una noción de shellabilidad generalizada en un contexto geométrico, compatible con la desarrollada por Björner y Wachs en el contexto combinatorio ([1]).

La charla está pensada para un público matemático general.

A. Björner, M. L. Wachs. *Shellable Nonpure Complexes and Posets I*. Transactions of the American Mathematical Society, Volume 348, Number 4 (1996).

N.A. Capitelli, E.G. Minian. *Non-homogeneous Combinatorial Manifolds and shellability*. Work in progress.

L. Glaser. *Geometrical Combinatorial Topology - Volume I*. Van Nostrand Reinhold Company (1970).

W.B.R. Lickorish. *Simplicial Moves on Complexes and Manifolds*. Geometry and Topology Monographs, Volume 2, 299- 320 (1999).

---

**Autores: Manuela A. Cerdeiro**

**Lugar: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA**

**Expositor: Manuela A. Cerdeiro**

---

### Pequeñas perturbaciones en espacios finitos

La relación entre espacios topológicos finitos y poliedros compactos fue investigada en los años 60 por McCord [Mc] y Stong [St] y más recientemente por Barmak y Minian [BM]. A partir de esta relación, se puede utilizar la naturaleza combinatoria de los espacios finitos para resolver y analizar problemas geométricos.

En esta charla repasaremos primero algunos de los conceptos y resultados básicos sobre espacios finitos, incluyendo su correspondencia con los conjuntos parcialmente ordenados, a partir de la cual se los puede estudiar combinatoriamente. Luego nos centraremos en estudiar los métodos de reducción de aristas, es decir, analizaremos cómo cambia la topología de un espacio finito, desde el punto de vista homotópico y homológico, al quitar una arista de su diagrama de Hasse y cómo se traduce este cambio en los poliedros asociados al espacio.

Los resultados que expondré en esta charla son parte de mi Tesis de Licenciatura [Ce], dirigida por G. Minian y presentada en Marzo de 2010.

J. A. Barmak, E. G. Minian, *Simple homotopy types and finite spaces*, Advances in Mathematics 218, Issue 1, pp. 87-104 (2008).

M. A. Cerdeiro, *Pequeñas perturbaciones en espacios finitos*, Tesis de Licenciatura. Departamento de Matemática, FCEyN, UBA (2010). Disponible en <http://cms.dm.uba.ar/Members/manuelacerdeiro>.

M. C. McCord, *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 33, No. 3, pp. 465-474 (1966).

R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 123, No. 2, pp. 325-340 (1966).

**Autores:** Jorge Tomás Rodríguez  
**Lugar:** Universidad de Buenos Aires  
**Expositor:** Jorge Tomás Rodríguez

---

#### Versiones combinatorias de la dualidad de Alexander

La versión clásica de la dualidad de Alexander dice que, si  $A$  es un subespacio triangulable de la esfera  $S^N$ , su  $n$ -ésimo grupo de homología es isomorfo al  $(N - n - 1)$ -ésimo grupo de cohomología del complemento de  $A$  en la esfera. Lo que esta dualidad nos está diciendo es que los agujeros de dimensión  $n$  de  $A$  son como los agujeros de dimensión  $N - n - 1$  del complemento.

Recientemente, y en forma independiente, Barr [3] y Björner y Tencer [4] probaron una versión combinatoria de la dualidad de Alexander para complejos simpliciales. Esta demostración se basa en asignarle a cada complejo simplicial  $K$ , un complejo simplicial  $K^*$ , su *dual de Alexander*, y en relacionar los grupos de homología de  $K$  con los grupos de cohomología de  $K^*$ .

A partir de la relación entre complejos simpliciales y posets, investigada por R.E. Stong [6], M.C. McCord [5] en los sesenta y, más recientemente, por Barmak y Minian [2], en este trabajo reformulamos esta dualidad en términos de posets y, utilizando las aplicaciones  $i$  y  $s$  introducidas por Barmak [1], proponemos nuevas formulaciones combinatorias de esta dualidad, extendiendo los resultados conocidos previamente.

Este trabajo forma parte de mi tesis de Licenciatura, que fue dirigida por G. Minian y presentada en Marzo 2010.

J. A. Barmak. *Topología Algebraica de Espacios Topológicos Finitos y Aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires (2009).

J. A. Barmak y G. Minian. *Simple homotopy types and finite spaces*. Adv. Math. 218 (2008), Issue 1, 87-104.

M. Barr. *A Duality On Simplicial Complexes*. Georgian Mathematical Journal, Volumen 9 (2002), Numero 4, 601-605.

A. Björner y M. Tencer. *Combinatorial Alexander Duality - A Short And Elementary Proof*. <http://arxiv.org/abs/0710.1172v3> (2008).

M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Mathematical Journal 33(1966), 465-474.

R.E. Stong. *Finite topological spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 325-340.



# Lógica y Computabilidad

*Organizan:*

*José Luis Castiglione, Ricardo Rodríguez*



**Autores:** Patricia Galdeano  
**Lugar:** Universidad Nacional de San Luis  
**Expositor:** Patricia Galdeano

---

#### Juego cooperativo con uso de información

Estudiamos un problema de decisión sobre el valor de la información en un modelo cooperativo. Consideramos un mercado fijo, con  $n$  ( $n \geq 2$ ) firmas, individuos o empresas (los usuarios) y un innovador, de modo que: El Innovador, es un jugador que participa en el mercado ofreciendo una información o tecnología a los usuarios. Los usuarios son  $n$  jugadores similares, que ingresan al mercado para realizar la misma actividad los cuales pueden adquirir o no la información (o tecnología) ofrecida por el innovador. Los jugadores pueden cooperar entre sí formando coaliciones, que llamaremos: Informadas, si el innovador pertenece a la coalición, es decir, los usuarios de ésta coalición adquieren la información. No Informadas si el innovador no es parte de la coalición, es decir, los usuarios de ésta coalición no adquieren la información. La situación entera se modela como un juego cooperativo de  $(n + 1)$  jugadores, definiendo explícitamente la función característica, y se estudian las propiedades de dicha función. Finalmente estudiamos el Core del juego, el cual resulta no vacío. Se da una caracterización del Core y se determina que el valor de Shapley es un punto del mismo.

---

**Autores:** Ignacio Viglizzo, Fernando Tohmé  
**Lugar:** Universidad Nacional del Sur  
**Expositor:** Ignacio Viglizzo

---

#### Bringing Empathy to Game Theory

A frequent criticism that game theory faces is the blind egotism that seems to drive the rational agents that the theory purportedly models. We will introduce here a new (as far as we know) tool that will allow us to model agents that care about the payoffs that the other players will receive.

We will proceed by applying the new method to a well known and problematic example: the prisoner's dilemma. Then we will draw some conclusions and will try next to generalize the method, while preserving its desirable features.

Classically, a player only regards the information they have about the other player's payoffs as a way of assessing their most likely actions, under

the hypothesis that they will behave *rationally*: they will take the actions most likely to maximize their *utility*.

We will keep this notion of rational agents but we will distinguish between payoffs for an outcome in a game and their (subjective) utility. This will in fact let us describe a space of *types* of players, one we hope is wide enough to explain a range of behaviors based on the simple single assumption that players care about each other's payoff (either in a positive or negative fashion).

---

**Conferencia Invitada**  
**Hector Freytes**  
**Instituto Argentino de Matemática IAM-CONICET**

---

Extensiones modales en retículos orthomodulares

En 1936, Birkhoff and von Neumann [1] proponen una lógica no clásica para la mecánica cuántica basada en las propiedades de retículo de todos los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert. Dichas propiedades son capturadas en la estructura de retículo orthomodular. Más tarde, el estudio algebraico de extensiones modales de la estructura orthomodular fue motivado en diferentes maneras. Una de estas consiste en extender la estructura con un cuantificador algebraico en el sentido de Halmos [5] en donde el cuantificador satisface ciertas propiedades análogas a los operadores modales sobre álgebras de Boole. Otra manera proviene de considerar inmersiones de sistemas de lógica cuántica en estructuras modales [2].

En esta charla se desarrollará una extensión modal basada en una motivación estrictamente física [3, 4]. Desde un punto de vista formal, se considera la clase de los retículos orthomodulares  $L$  que satisfacen la siguiente propiedad conocida como *propiedad de cubrimiento central*: para todo  $x \in L$ , existe

$$e(x) = \text{máx}\{z \in Z(L) : z \leq x\}$$

donde  $Z(L)$  es el centro del retículo.

Se demostrará que dicha clase conforma un discriminator variety. Además se establecerá un cálculo estilo Hilbert algebrizable en esta variedad. Finalmente se estudiarán modelos de Kripke del mencionado cálculo construidos a partir de Baer-semigroups.

[1] G. Birkhoff, and J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. Math. 27 (1936) 823-843.

[2] H. Dishkant, Imbedding of the quantum logic in the modal systems of Brouwer, J. Symbolic Logic 42 (1977) 421-328.

[3] G. Domenech, H. Freytes and C. de Ronde, Scopes and limits of modality in quantum mechanics, Ann. der Physik, 15 (2006) 853-860.

[4] G. Domenech, H. Freytes and C. de Ronde, Modal type orthomodular logic, Mathematical Logic Quarterly 55 (2009), 287-299.

[5] M. F. Janowitz, Quantifiers and orthomodular lattices Pacific J. Math 13 (1963) 660-676.

---

**Autores: Víctor L. Fernández, Natalia Naccarato**

**Lugar: Instituto de Ciencias Básicas (Área Matemática); FFHA; Universidad Nacional de San Juan (UNSJ)**

**Expositor: Víctor L. Fernández**

---

### Fibrilación de Lógicas Matriciales con Identificación de Conectivos

Al combinar dos lógicas proposicionales utilizando el método conocido como Fibrilación (ver [1]), en general se genera un nuevo lenguaje que consta de todos los conectivos de cada lógica. De esta forma el nuevo lenguaje de la lógica resultante usualmente se define como la unión disjunta de los lenguajes originales. Sin embargo, algunos autores han intentado adaptar la técnica de tal forma que sea posible considerar a uno o a varios conectivos como pertenecientes a ambos lenguajes. Así, dos conectivos, inicialmente considerados diferentes, son identificados por un único símbolo del nuevo lenguaje. Esta adaptación, conocida como *fibrilación con conectivos compartidos*, usualmente ha sido expresada en lenguaje de Teoría de Categorías para la Combinación de Lógicas (ver [4], por ejemplo).

Esta comunicación pretende dar una nueva adaptación del método de fibrilación, en donde ciertos conectivos de diferentes lógicas son considerados el mismo, pero evitando el formalismo categorial. Se intenta en cambio utilizar una técnica más simplificada, conocida como *Fibrilación por Funciones*, aplicada particularmente a lógicas definidas por matrices.

Sintéticamente, la Fibrilación por Funciones procede del siguiente modo (ver [1] y [2]): dadas dos lógicas con lenguajes  $C_1$  y  $C_2$ , definidas por matrices lógicas  $M_1 = (A_1, D_1)$  y  $M_2 = (A_2, D_2)$ , se define en la unión disjunta  $C_1 \uplus C_2$  una nueva relación de consecuencia, mediante un par de funciones  $(\lambda, \mu)$ , donde  $\lambda : A_1 \rightarrow A_2$  y  $\mu : A_2 \rightarrow A_1$ . Estas funciones "traducen" los valores de verdad de una matriz a la otra, y viceversa.

En este método usualmente no se establecen restricciones en las funciones  $\lambda$  ni  $\mu$ . En esta comunicación se brindarán diversas condiciones sobre  $\lambda$  y  $\mu$  para que el mismo proceso pueda ser aplicado a la unión (no disjunta) de lenguajes,  $C_1 \cup C_2$  y, por lo tanto, pueda utilizarse en la Identificación de Conectivos. Además, se verán diversos ejemplos que motivan este tipo de análisis, basados sobre todo en lógicas inducidas por  $t$ -normas, siguiendo la línea de lo expuesto en [3].

[1] W.A. Carnielli; M.E. Coniglio; D. Gabbay; P. Gouveia; C. Sernadas. *Analysis and Synthesis of Logics. How to Cut and Paste Reasoning Systems*. Volume 35 in the Applied Logic Series, Springer, 2008.

[2] M.E. Coniglio; V.L. Fernández. Plain fibring and direct union of logics with matrix semantics. *In: Proceedings of the 2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence (IICAI 2005)*. Ed. Bhanu Prasad, pp. 1590-1608. Pune, India, 2005.

[3] V.L. Fernández; N. Naccarato. Fibring por funciones aplicado a Lógicas Inducidas por  $t$ -normas (Abstract). Libro de Resúmenes de la LIX Reunión de la UMA. Universidad Nacional de Mar del Plata, 2009.

[4] A. Sernadas, C. Sernadas; C. Caleiro. Fibring of Logics as a Categorical Construction. *Journal of Logic and Computation*, 9 (2): 149 - 179, 1999.

---

**Autores: Diego Castaño, J. Patricio Díaz Varela, Antoni Torrens**

**Lugar: UNS - INMABB**

**Expositor: Diego Castaño**

---

#### Indescomponibilidad de Álgebras libres en algunas subvariedades de reticulados residuados y sus subreductos implicativos acotados

Un reticulado residuado es un reticulado acotado que tiene además una estructura de monoide conmutativo y una operación binaria  $\rightarrow$  que satisface la condición de residuación:  $x \odot y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \rightarrow z$ . Utilizando cálculos de secuentes asociados con ciertas subvariedades de reticulados residuados, obtenemos la indescomponibilidad de las álgebras libres en dichas subvariedades. Esto sucede para la variedad de los reticulados residuados, la variedad de los reticulados residuados involutivos, la variedad de las álgebras de Heyting, etc.

Posteriormente extendemos dichos resultados en dos direcciones. Por un lado, probamos la indescomponibilidad de las álgebras libres en ciertas variedades relacionadas a las anteriores. Así resulta la indescomponibilidad de las álgebras libres para las BL-álgebras y los reticulados residuados de Glivenko.

Finalmente, estudiamos la indescomponibilidad de las álgebras libres en subreductos implicativos acotados. Por ej., probamos la indescomponibilidad

de las álgebras libres para BCK-álgebras acotadas, BCK-álgebras involutivas y BCK-álgebras acotadas básicas.

N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated Lattices. An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Studies in Logic vol 151, Elsevier. Amsterdam, 2007.

J. Gispert, A. Torrens, Boolean representation of bounded BCK-algebras, *Soft Computing* 12 (10), 2008, 941-954.

V. N. Grišin, Predicate and set-theoretic calculi based on Logic without contractions, *Math. USSR Izvestija* 18 n.Â°1, 1981, 41-59.

Y. Komori, H. Ono, Logic without contraction rule, *Journal of Symbolic Logic*, 50 (1985), 169-2001.

T. Kowalski, H. Ono, The Variety of Residuated Lattices is Generated by its Finite Simple Members, *Reports on Math. Logic* 34, 2000, 59-77.

T. Kowalski, H. Ono, *Residuated Lattices: An algebraic glimpse at logics without contraction*, Japan Advanced Institut of Science and Thechnology, March 2001.

---

**Autores: Castiglioni, José Luis y San Martín, Hernán Javier.**

**Lugar: Dto. de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas, UNLP - Conicet.**

**Expositor: San Martín, Hernán Javier**

---

#### Completud local afín de retículos residuados.

Sea  $A$  un álgebra con universo  $A$ . Sean  $x, y \in A$  y  $\theta_{x,y}$  la congruencia generada por el par  $(x, y)$ . Si  $f : A \rightarrow A$  es una función,

$f$  es compatible  $\iff \forall x, y \in A : (fx, fy) \in \theta_{x,y}$ .

Utilizando esta observación es posible dar una descripción para las funciones compatibles  $n$ -arias en términos de las congruencias principales del álgebra dada. Por esta razón, estudiando las congruencias principales de un álgebra se pueden determinar condiciones necesarias y suficientes para que una función resulte compatible. Para las álgebras de ciertas variedades la condición de que un par de elementos pertenezca a una congruencia principal puede ser expresada a través de ecuaciones o de enunciados de primer orden que involucren ecuaciones. Por ejemplo, si  $\langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$  es un álgebra de Heyting entonces  $(z, w) \in \theta_{x,y}$  sii  $x \leftrightarrow y \leq z \leftrightarrow w$ , siendo  $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$  (ver Lema 2.1 de [2]); en el caso de que el álgebra  $\langle L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e \rangle$  sea un retículo residuado conmutativo se tiene que  $(z, w) \in \theta_{x,y}$  sii existe un número natural  $n$  tal que  $s(x, y)^n \leq s(z, w)$ , siendo  $s(x, y) = ((x \rightarrow y) \wedge e) \cdot ((y \rightarrow x) \wedge e)$  (ver Teorema 1 de [3]). Notemos que el último resultado generaliza al dado para las álgebras de Heyting. Utilizando las descripciones para operadores

compatibles obtenidas fue probada la completud local afín de las álgebras de Heyting y de los retículos residuados conmutativos, respectivamente.

En el presente trabajo daremos una caracterización para los operadores compatibles en la variedad de retículos residuados utilizando congruencias principales ([1], [4]) y aplicaremos este resultado para probar que todo retículo residuado es localmente afín completo. Finalmente presentaremos varios ejemplos de operadores compatibles que resultan una generalización de las familias de operadores considerados en [3].

[1] Blount K. and Tsinakis C., *The Structure of Residuated Lattices*. Internat. J. Algebra Comput. 13 (4), 437-461, 2003.

[2] Caicedo X. and Cignoli R., *An algebraic approach to intuitionistic connectives*. Journal of Symbolic Logic, 66, Nro. 4, 1620-1636, 2001.

[3] Castiglioni J.L, Menni M. and Sagastume M, *Compatible operations on commutative residuated lattices*. JANCL, vol 18, 413-425, 2008.

[4] Jipsen P. and Tsinakis C., *A Survey of Residuated Lattices*. Ordered algebraic structures, 19-16, Dev. Math., 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

---

**Autores: Pedro Sánchez Terraf**  
**Lugar: CIEM-FaMAF, UNC**  
**Expositor: Pedro Sánchez Terraf**

---

#### Indemostrabilidad de la Caracterización Lógica de la Bisimulación

Revisaremos los Procesos Etiquetados de Markov (PME), la noción de bisimulación y su caracterización por una lógica modal en el caso de espacios analíticos (J. Desharnais, *Labelled Markov Processes*, 1999). Mostraremos con un ejemplo que este resultado no se puede generalizar a espacios medibles generales y es relativamente consistente con ZFC que falle incluso para espacios que son proyecciones de un espacio coanalítico (más aún,  $\Delta_1^1$ ).

**Autores:** Sergio Celani, Daniela Montangie

**Lugar:** Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires - Universidad Nacional del Comahue

**Expositor:** Daniela Montangie

---

### $H$ -álgebras con operador $\diamond$

En [1] estudiamos las álgebras de Hilbert con supremo, o  $H^\vee$ -álgebras, como álgebras  $\langle A, \rightarrow, \vee, 1 \rangle$  del tipo  $(2, 2, 0)$  donde  $\langle A, \rightarrow, 1 \rangle$  es un álgebra de Hilbert,  $\langle A, \vee, 1 \rangle$  es un  $\vee$ -semirretículo con último elemento, y  $a \rightarrow b = 1$  si y sólo si  $a \vee b = b$ , para todo  $a, b \in A$ . No es difícil comprobar que esta clase de álgebras es una variedad. En esta comunicación vamos a definir las  $H^\vee$ -álgebras con un operador de posibilidad, o  $H^\vee \diamond$ -álgebras, como álgebras  $\langle A, \vee, \rightarrow, \diamond, 0, 1 \rangle$  donde  $\langle A, \vee, \rightarrow, 1 \rangle$  es un  $H^\vee$ -álgebra,  $0 \rightarrow a = 1$  para todo  $a \in A$  y además se verifican las siguientes condiciones:

1.  $\diamond 0 = 0$ ,
2.  $\diamond(a \vee b) = \diamond a \vee \diamond b$ .

Vamos a extender la representación topológica obtenida para las  $H^\vee$ -álgebras [1] al caso de las  $H^\vee \diamond$ -álgebras. Para ello introducimos la noción de  $H^\vee \diamond$ -espacios como  $H^\vee$ -espacios dotados de una relación binaria. Probamos que la categoría de las  $H^\vee \diamond$ -álgebras con semi-homomorfismos de Hilbert que preservan  $\vee$  y  $\diamond$ , es dualmente equivalente a la categoría de los  $H^\vee \diamond$ -espacios con ciertas relaciones llamadas fuertemente irreducibles.

S. A. Celani and D. Montangie, Hilbert Algebras with supremum, enviado a publicar.

---

**Autores:** Sergio A. Celani

**Lugar:** Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro

**Expositor:** Sergio A. Celani

---

### Propiedad de Hennessy-Milner en modelos monótonos

Los marcos monótonos (o marcos minimales monótonos) son una generalización de los marcos de Kripke que sirven para analizar semánticamente a las lógicas modales monótonas (ver [3]). Un modelo monótono es una estructura  $\mathcal{M} = \langle X, R, V \rangle$ , donde  $R \subseteq X \times \mathcal{P}(X)$  tal que para cada  $x \in X$  el conjunto  $R(x) = \{Y \subseteq X \mid (x, Y) \in R\}$  es creciente, y  $V$  es una valuación definida en  $X$ .

---

Una clase de modelos de Kripke  $\mathbf{M}$  tiene la propiedad de Hennessy–Milner si la equivalencia modal entre modelos de  $\mathbf{M}$  es una bisimulación. Por ejemplo, la clase de los modelos de Kripke modalmente saturados tiene la propiedad de Hennessy–Milner. En [1] se introdujo una adecuada noción de modelos monótonos modalmente saturados, diferente a la dada por Hansen en [2] y [3], que permite dar una versión de este resultado. En este trabajo continuamos con el estudio de propiedades de saturación en modelos monótonos. En particular vamos a probar que la extensión por valuaciones  $V_e(\mathcal{M})$  de un modelo  $\mathcal{M}$  es una imagen homomórfica de cualquier modelo compacto y modalmente saturado. También vamos a demostrar que la clase de todos los modelos compactos y modalmente saturados es una clase de Hennessy–Milner maximal.

S. A. Celani, Saturated neighbourhood models of monotonic modal logics, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, Vol. 49, No 1, (2008), pp. 111–121.

H. H. Hansen and C. Kupke. A Coalgebraic Perspective on Monotone Modal Logic, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 106, pages 121–143, Elsevier, 2004.

H. H. Hansen, Monotonic modal logic (Master's thesis). Preprint 2003–24, ILLC, University of Amsterdam, 2003.

---

### Conferencia Invitada

Santiago Figueira

Departamento de Computacion. FCEyN-UBA

---

### Cómputo de bisimulaciones y descripciones en algunos fragmentos de la lógica modal

En ciencias de la computación, una bisimulación es, a grandes rasgos, una relación binaria entre modelos que asocia aquellos que se comportan de la misma manera. Así, dos modelos son bisimilares cuando no pueden ser distinguidos mutuamente por un observador. La noción de bisimulación es ampliamente empleada en varias áreas como la lógica modal, la teoría de concurrencia, la teoría de conjuntos, la verificación formal, etc. En particular, en el contexto de la verificación formal se usa para atacar el problema del llamado problema de explosión de estados. La idea de las bisimulaciones surge como una herramienta teórica, principalmente para probar equivalencias. El costo algorítmico aparece en su aplicación a autómatas finitos: los algoritmos de

minimización (algunos conocidos ya en la década de 1950) están simplemente calculando el cociente del autómata por su autobisimulación máxima. Los mejores algoritmos para calcular bisimulaciones y minimizaciones módulo autobisimilaridad son variaciones del algoritmo de Paige y Tarjan para calcular la partición más gruesa de un grafo. Desde un punto de vista lógico, no existe una única noción de bisimulación. A cada lenguaje le corresponde una noción de bisimulación distinta. Mostraremos cómo calcular bisimulaciones (en ciertos contextos llamadas simulaciones) para la lógica modal básica y para algunos de sus fragmentos sub-booleanos. Adaptaremos estos algoritmos al problema de la descripción: dado un modelo finito y un elemento de ese modelo, obtener (en caso de que exista) una fórmula lógica que sea verdadera únicamente en el elemento dado. Estos resultados tienen aplicaciones directas al problema de la generación de expresiones referenciales, una tarea básica en el área de la generación de lenguaje natural. Analizaremos la complejidad de los algoritmos presentados y daremos ajustadas cotas superiores e inferiores para la longitud de las formulas obtenidas en relación al tamaño del modelo.

---

**Autores:** Ariel Arbiser

**Lugar:** Dpto. de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

**Expositor:** Ariel Arbiser

---

#### Sistemas de tipos intersección puros

Introducimos una generalización del sistema de tipos intersección  $\lambda\cap$  para el  $\lambda$ -cálculo (Barendregt, Coppo, Dezani, Honsell, Longo, Veneri), con tipos dependientes y siguiendo los lineamientos de los sistemas de tipos puros (PTSs, de Barendregt, Berardi, Geuvers, Nederhof, Terlouw), paramétricamente a partir de axiomas, reglas de formación de tipos y sub tipado.

Dado un conjunto de constantes  $C$  y otro infinito numerable de variables  $V$ , los términos están dados por  $T ::= v \mid c \mid TT \mid \lambda v.T \mid T \rightarrow T \mid T \cap T$ , con  $c \in C$  y  $v \in V$ . Un *sistema de tipos intersección puros* (IPTS) para esos términos es una cuaterna  $\lambda S = (S, A, R, R', \leq)$  con  $S \subseteq C$  un conjunto de *sorts*,  $A$  un conjunto de *axiomas* o pares  $c : s$  con  $c \in C$  y  $s \in S$ ,  $R$  y  $R'$  ambos subconjuntos de  $S \times S \times S$ , y  $\leq$  un cuasi orden parcial sobre los términos (del que usualmente se requerirán ciertas propiedades). Un contexto  $\Gamma$  es un conjunto finito de pares *variable-término* en donde no se repite ninguna variable del lado izquierdo, notando  $dom(\Gamma) = \{x \mid \exists A (x : A) \in \Gamma\}$ . La relación

de derivación (o inferencia)  $\vdash_{\lambda S}$  está dada por las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll}
 (c : s) \in A \Rightarrow \Gamma \vdash c : s & \Gamma \vdash A : s, x \notin \text{dom}(\Gamma) \Rightarrow \Gamma, x : A \vdash x : A \\
 \Gamma \vdash M : A, \Gamma \vdash B : s, x \notin \text{dom}(\Gamma) \Rightarrow \Gamma, x : B \vdash M : A & \Gamma \vdash \omega : s \Rightarrow \Gamma \vdash A : \omega \text{ (donde } \omega \in C \text{ fijo)} \\
 \Gamma \vdash A : s_1, \Gamma \vdash B : s_2, (s_1, s_2, s_3) \in R \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B : s_3 & \Gamma \vdash F : A \rightarrow B, \Gamma \vdash M : A \Rightarrow \Gamma \vdash FM : B \\
 \Gamma \vdash A : s_1, \Gamma \vdash B : s_2, (s_1, s_2, s_3) \in R' \Rightarrow \Gamma \vdash A \cap B : s_3 & \Gamma, x : A \vdash M : B, \Gamma \vdash A \rightarrow B : s \Rightarrow \Gamma \vdash \lambda x.M : A \rightarrow B \\
 \Gamma \vdash M : A \cap B \Rightarrow \Gamma \vdash M : A & \Gamma \vdash M : A \cap B \Rightarrow \Gamma \vdash M : B \\
 \Gamma \vdash M : A, \Gamma \vdash M : B, \Gamma \vdash A \cap B : s \Rightarrow \Gamma \vdash M : A \cap B & \Gamma \vdash M : A, \Gamma \vdash B : s, A \leq B \Rightarrow \Gamma \vdash M : B
 \end{array}$$

Este marco expresa muchos cálculos diferentes, incluyendo el simplemente tipado (Curry) al tomar  $S = \{*\}$ ,  $A = \{* : *\}$ ,  $R = \{(*, *, *)\}$ ,  $R' = \emptyset$  y  $\leq$  la igualdad, así como  $\lambda \cap$  al tomar  $S = \{*\}$ ,  $A = \{* : *, \omega : *\}$ ,  $R = R' = \{(*, *, *)\}$  y  $\leq$  dada por ciertos axiomas.

En los IPTSs (con ciertas hipótesis para la relación  $\leq$ ) valen las siguientes propiedades, análogas a las de los PTSs.

Sustitución: si  $\Gamma \vdash A : B$  entonces  $\Gamma[x = C] \vdash A[x = C] : B[x = C]$  (donde  $\bullet[x = \bullet]$  denota sustitución). Transitividad: si  $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash A : B$  y  $\Gamma \vdash x_i : A_i$  para  $1 \leq i \leq n$  entonces  $\Gamma \vdash A : B$ . Monotonía o *thinning*: si  $\Delta \supseteq \Gamma \vdash A : B$  entonces  $\Delta \vdash A : B$ . Lema de generación para términos (pseudo inversión de las reglas de tipado). Corrección del tipado: el tipo de todo término será un sort o bien de algún sort, más precisamente, si  $\Gamma \vdash A : B$  entonces  $B \in S$  o  $\exists s \in S \Gamma \vdash B : s$ .

Se prueba además que todos los IPTSs son consistentes (y como consecuencia hay PTSs que no son IPTSs). Numerosos IPTSs cumplen la preservación de tipos bajo reducción. Algunos son fuertemente normalizantes, aunque queda abierta la búsqueda de una posible caracterización de ellos, el uso de patrones para las abstracciones en los términos, y eventualmente una presentación que combine IPTSs con PTSs.

H. P. Barendregt. Lambda Calculi with Types. Handbook of Logic in Computer Science, Vol II, chapter 2. Clarendon Press, Oxford, 1992.

M. H. B. Sørensen, P. Urzyczyn. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. newblock University of Copenhagen and University of Warsaw, 1998.

---

**Autores: Diego Castaño, J. Patricio Díaz Varela, Antoni Torrens**

**Lugar: UNS - INMABB**

**Expositor: J. Patricio Díaz Varela**

---

### Descomponibilidad de álgebras libres en variedades de reticulados residuados pseudocomplementados

Un reticulado residuado es un reticulado acotado que tiene además una estructura de monoide conmutativo y una operación binaria  $\rightarrow$  que satisface la

condición de residuación:  $x \odot y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \rightarrow z$ . Definiendo  $\neg x := x \rightarrow 0$ , decimos que un reticulado residuado es pseudocomplementado si vale la identidad  $x \wedge \neg x = 0$ , en cuyo caso  $\neg x$  es el pseudocomplemento de  $x$ .

Dada una variedad de reticulados residuados pseudocomplementados, probamos que las álgebras libres en esa variedad son descomponibles si y sólo si la variedad es de Stone, es decir, satisface la identidad  $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ . Para ello, damos primero una caracterización de los reticulados residuados pseudocomplementados como aquellos reticulados residuados cuya álgebra de elementos regulares es un álgebra de Boole.

También probamos que la variedad de reticulados residuados de Stone es cosplitting dentro de la variedad de las álgebras de Heyting.

Cignoli, R., Free algebras in varieties of Stonean residuated lattices, *Soft Comput.* **12** (2008), 315-320.

Cignoli, R. and Torrens, A., Free Stone algebras, *Discrete Math.* **222** (2002), 251-257.

N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono *Residuated Lattices. An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*. Studies in Logic vol 151, Eselvier. Amsterdam 2007

---

**Autores: Aldo V. Figallo, Gustavo Pelaitay y Claudia Sanza**

**Lugar: Universidad Nacional del Sur y Universidad Nacional de San Juan**

**Expositor: Gustavo Pelaitay**

---

Una dualidad discreta para las álgebras de Heyting simétricas temporales

En esta nota, continuamos el estudio de las álgebras de Heyting simétricas temporales (o *TSH*-álgebras) introducidas en [1], las cuales constituyen una generalización de las álgebras de Boole temporales ([3]). Más precisamente, describimos una dualidad discreta para las *TSH*-álgebras teniendo en cuenta la obtenida en [2] para álgebras de Heyting. Además, introducimos un cálculo proposicional y probamos que tiene como contrapartida algebraica las *TSH*-álgebras. Finalmente, la dualidad antes mencionada nos permitió mostrar el teorema de completud para este cálculo.

A.V. Figallo, G. Pelaitay y C. Sanza, *Operadores temporales sobre álgebras de Heyting simétricas*, LIX Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Mar del Plata, 2009.

E. Orłowska and I. Rewitzky, *Discrete Dualities for Heyting Algebras with Operators*, *Fund. Inform.* **81** (2007), 275-295.

T. Kowalski, *Varieties of tense algebras*, *Rep. Math. Logic.* **32** (1998), 53-95.

**Autores:** Juan Manuel Cornejo  
**Lugar:** Depto. de Matemática - UNS  
**Expositor:** Juan Manuel Cornejo

---

### Lógica semi-Intuicionista

En [1], Sankappanavar introdujo una nueva clase ecuacional de álgebras, que denominó álgebras de semi-Heyting, como una abstracción de las álgebras de Heyting.

Un álgebra  $\mathbb{L} = \langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1 \rangle$  es un álgebra de semi-Heyting si se satisfacen las siguientes condiciones:

(SH1)  $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$  es un reticulado con 0 y 1.

(SH2)  $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$ .

(SH3)  $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$ .

(SH4)  $x \rightarrow x \approx 1$ .

Toda álgebra de semi-Heyting  $\mathbb{L}$  es un reticulado distributivo pseudo-complementado, las congruencias sobre  $\mathbb{L}$  están determinados por los filtros y la variedad de las álgebras de semi-Heyting es aritmética, extendiendo los resultados correspondientes de las álgebras de Heyting. Además, las álgebras de semi-Heyting comparten con las álgebras de Heyting otras propiedades significativas.

Considerando que las álgebras de Heyting representan la semántica para el cálculo proposicional intuicionista, el objetivo de este trabajo es definir una nueva lógica  $ST$  llamada lógica semi-Intuicionista de modo que las álgebras de semi-Heyting resulten ser su respectiva interpretación semántica. Para lograr el objetivo propuesto se introducirá una lista de axiomas y una nueva regla de inferencia, se desarrollará el álgebra de Lindembaum correspondiente, se demostrarán teoremas clásicos como el de completitud y deducción y finalmente se estudiará relaciones con la lógica intuicionista siendo ésta una extensión axiomática de  $ST$ .

[1] H.P. Sankappanavar, *Semi-Heyting Algebras: An Abstraction From Heyting Algebras*. Actas del IX Congreso A. Monteiro, Bahía Blanca, 2007.

**Conferencia Invitada**  
**Rafael Grimson**

---

Sobre Cuantificadores de Henkin y la Lógica de Información Imperfecta

Los cuantificadores de Henkin fueron introducidos por Leon Henkin en 1959, en su trabajo "Some Remarks on Infinitely Long Formulas". La lógica basada en dichos cuantificadores posee interesantes propiedades desde el punto de vista epistemológico y ha sido usada para estudios formales de los lenguajes naturales.

Su poder expresivo se sitúa entre la lógica de primer y segundo orden. Daremos la definición de dichos cuantificadores y mostraremos algunos ejemplos clásicos incluyendo la sentencia que afirma que el universo de interpretación es infinito, que un grafo es tres coloreable y el cuantificador de Rescher,  $Qx\phi(x)\psi(x)$ , que afirma hay al menos tantos  $x$  que satisfacen  $\phi$  como  $\psi$ .

Pasaremos luego a discutir algunos detalles de la definición, incluyendo el rol que juega el axioma de elección. Terminaremos presentado los resultados conocidos relacionados con el poder expresivo de dicha lógica.

En la segunda parte de la charla, nos concentraremos en la lógica de información imperfecta (IF-logic, information friendly logic). Luego de discutir su relación con los cuantificadores de Henkin, de definir la sintaxis y estudiar la definición tradicional de su semántica, discutiremos algunos problemas que pueden encontrarse en la literatura debido a un fenómeno denominado *signaling*.

Discutiremos el poder expresivo de dicha lógica y presentaremos una semántica alternativa, basada en juegos, que resulta composicional y que coincide con la semántica original en el caso de fórmulas denominadas regulares. Esta nueva semántica permite resolver los problemas que aparecían con la semántica original.

Por último, consideraremos el operador  $\downarrow$  introducido por Hodges con el fin de obtener la negación clásica dentro de ésta lógica. Mostraremos cómo definir correctamente la semántica del lenguaje así obtenido y estudiaremos su poder expresivo. Terminaremos la charla planteando algunos problemas abiertos relacionado con lo expuesto.

**Autores:** Aldo V. Figallo y Claudia M. Gomes

**Lugar:** Instituto de Ciencias Básicas. Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes. Universidad Nacional de San Juan

**Expositor:** Claudia M. Gomes

---

### Sobre las $Df_2$ -Álgebras finitas

Las álgebras cilíndricas libres de elementos diagonales de dimensión dos, también llamadas  $Df_2$ -álgebras, fueron introducidas por A. Tarski, L. Chin y F. Thompson en [2] (ver también [1]) con el objeto de proveer un modelo algebraico adecuado para el estudio del cálculo de predicados de primer orden con dos variables. Es bien conocido que por medio de los espacios de Halmos se obtiene una representación topológica para las  $Df_2$ -álgebras, y a partir de esta dualidad es posible describir importantes conceptos algebraicos de esta variedad de álgebras.

Nosotros en esta nota, estudiamos el conjunto ordenado de los  $E_1E_2$ -saturados del espacio dual  $(X(B_n), E_1, E_2)$  de una  $Df_2$ -álgebra finita  $(B_n, \exists_1, \exists_2)$  y su relación con los  $Df_2$ -ideales. Los resultados obtenidos nos han permitido establecer propiedades del retículo de las congruencias  $Con_{Df_2}(B_n)$  de  $(B_n, \exists_1, \exists_2)$ . En particular hemos establecido que  $Con_{Df_2}(B_n)$  es un álgebra de Boole.

M. Figallo; *Una contribución sobre la variedad de las álgebras cilíndricas de dimensión dos libres de elementos diagonales* Tesis de Magíster. Universidad Nacional del Sur.

B. Jónsson y A. Tarski, *Boolean algebras with operators, Parts I and II*, American Journal of Mathematics, 73 (1951), 891-939, and 74 (1952), 127-162.

---

**Autores:** E. Pick, A. Figallo, S. Saad

**Lugar:** Instituto de Ciencias Básicas - UNSJ

**Expositor:** E. Pick

---

### $ml$ - $BCK$ -álgebras de subintervalos

Un álgebra  $\langle A, \rightarrow, \wedge, \vee, *, 0, 1 \rangle$  de tipo  $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$  es una  $ml$ - $BCK$ -álgebra si verifica las condiciones siguientes:

- (i) El reducto  $\langle A; \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  es un retículo acotado,
- (ii)  $\langle A; *, 1 \rangle$  es un semigrupo conmutativo en el que  $1 * x = x$ ,
- (iii) Se satisfacen las condiciones siguientes:

- (B1)  $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$ ,  
 (B2)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$ ,  
 (B3)  $(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$ ,  
 (B4)  $x * (x \rightarrow y) = x \wedge y$ ,  
 (B5)  $((x \wedge y) * z) \rightarrow (x \wedge (y * z)) = 1$ .

En esta nota consideramos los intervalos  $[a, b]$  en álgebras de una subvariedad  $V$  de  $ml$ - $BCK$ -álgebras, definimos las operaciones  $\rightarrow_a^b$ ,  $*_a^b$  y  $\vee_a^b$ , por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} x \rightarrow_a^b y &= b * (x \rightarrow y), \\ x *_a^b y &= (x * (b \rightarrow y)) \vee a, \\ x \vee_a^b y &:= (b * (b * (x \rightarrow y) \rightarrow y)) \wedge (b * (b * (y \rightarrow x) \rightarrow x)), \end{aligned}$$

y probamos que  $\langle [a, b], \rightarrow_a^b, *_a^b, \vee_a^b, \wedge, a, b \rangle$  pertenece a  $V$ .

---

**Autores: M. Cristina Canals Frau**

**Lugar: Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Nacional de San Juan**

**Expositor: M. Cristina Canals Frau**

---

Congruencias en los semi retículos implicativos modales  $(n+1)$ -valuados

En [2] se introdujo la clase ecuacional de los semi retículos implicativos modales  $(n+1)$ -valuados (ver también [1]). Ahora, en esta nota se obtiene resultados de interés sobre el retículo de las congruencias. En particular se prueba que en esta variedad se satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. Las congruencias principales son ecuacionalmente definibles.
2. Posee la propiedad de extensión de congruencias y de congruencias principales.
3. Es a congruencias regulares y distributivas.
4. El retículo de las congruencias principales coincide con el de las compactas.

M. Canals Frau, A.V. Figallo,  $(n+1)$  valued Hilbert modal algebras, Notas de la Sociedad Matematica de Chile, vol.X, Nro 1, S antiago de Chile 1991, 143-149.

M. Canals Frau, A.V. Figallo,  $(n+1)$ -valued modal implicative Semilattices, Proceedings of the twenty second international symposium on multiple valued Logic, Sendai, Japon,1992, 190-196.

**Autores:** Carina Murcian, Fernando Ramos

**Lugar:** Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan

**Expositor:** Fernando Ramos

---

#### Estructuras $\omega$ -Twist para las Lógicas infinito-valente de Gödel

La presentación algebraica alternativa conocida como *Semántica de Estructuras Twist* (o Estructuras Torcidas), se está estudiando con mayor profundidad en los últimos años (ver [3] y [4]). En particular, ya se ha podido adaptar al caso de las Lógicas  $n$ -valentes de Gödel (ver [2]).

La presente comunicación generaliza los resultados mencionados obteniendo nuevas semánticas alternativas, en este caso para la Lógica *infinito valente* de Gödel, la cual es un caso particular de lógica definida por una  $t$ -norma (ver [1]).

Esta nueva construcción se basa en una técnica más general que la usual de Estructuras Twist ya conocidas, y ya ha sido utilizada en [4] con el nombre de *Semántica de estructuras  $\omega$ -Twist*. Sintéticamente, en vez de definir las estructuras Twist sobre productos finitos de álgebras, se utilizan productos numerables.

[1] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] C. Murciano; F. Ramos. Semántica de Estructuras Twist para las Lógicas  $n$ -valentes de Gödel. Comunicación en la sesión de Lógica y Computabilidad *Reunión Anual UMA*. 2009.

[3] S. Odintsov. On Axiomatizing Shramko-Wansing's Logic. *Studia Logica*, vol. 91 : 407 – 428, 2009.

[4] F. Ramos; V. Fernández. Twist-structures semantics for the logics of the hierarchy  $I^n P^k$ . *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 19 - No.2. Págs. 183-209. 2009.

---

**Autores:** Marina Lattanzi, Alejandro Petrovich

**Lugar:** Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Unlpam; Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA

**Expositor:** Marina Lattanzi

---

#### Interdefinibilidad de Cuantificadores Existenciales en las Álgebras de Lukasiewicz Trivalentes

En [2] hemos introducido una noción alternativa de cuantificador existencial en las álgebras de Lukasiewicz Trivalentes. Este cuantificador  $\exists$  se caracteriza por la propiedad que si  $f$  es una función proposicional definida en un

---

conjunto no vacío  $X$  con valores en el álgebra de Lukasiewicz trivalente con tres elementos  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$  entonces  $\exists f$  toma el valor  $\frac{1}{2}$  si y sólo si  $f(x) = \frac{1}{2}$  para algún  $x \in X$ . En [2] hemos dado un sistema de axiomas para estos cuantificadores en el lenguaje de las álgebras de Lukasiewicz Trivalentes con un símbolo de operación unario  $\exists$  y por lo tanto determinan una variedad a la que notamos con  $V_E$ . En este trabajo mostramos que este cuantificador es interdefinible con el cuantificador existencial definido por Luiz Monteiro en [1]. Como consecuencia importante de esto, se deduce entre otras cosas que  $V_E$  y  $V_{EM}$  tienen las mismas álgebras libres, donde  $V_{EM}$  es la variedad de las álgebras de Lukasiewicz Trivalentes monádicas desarrolladas por Luiz Monteiro. También desarrollamos una dualidad topológica para las álgebras de la variedad  $V_E$ .

L. Monteiro, *Álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática, UNS, 113 páginas, 1974.

A. Petrovich, *An alternative definition of quantifier in three valued logics*, comunicación presentada en el XIV Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Paraty, Rio de Janeiro, 11 al 17 de Mayo de 2008.

---

**Autores:** Carlos Gallardo, Alicia Ziliani

**Lugar:** U.N.S Bahía Blanca

**Expositor:** Carlos Gallardo

---

#### La implicación débil en las $m$ -álgebras de Lukasiewicz generalizadas de orden $n$

En [4], se definieron las  $m$ -álgebras de Lukasiewicz generalizadas de orden  $n$  (o  $L_n^m$ -álgebras) como una generalización de las álgebras de Lukasiewicz de orden  $n$  y como un caso particular de las álgebras de Ockham. Algunos resultados sobre estas álgebras también fueron obtenidos en [2,3]. En esta nota, introducimos una operación implicación en las  $L_n^m$ -álgebras, a la que denominamos implicación débil, que generaliza a la considerada en [1] para las álgebras de Lukasiewicz de orden  $n$ . Los sistemas deductivos asociados a esta implicación nos permitieron establecer un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de una  $L_n^m$ -álgebra y el retículo de todos los sistemas deductivos de ésta. Este resultado nos permitió caracterizar a las congruencias principales de manera más simple que la obtenida en [5].

[1] R. Cignoli, *Moisil Algebras*, Notas de Lógica Matemática 27, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1970.

- [2] C. Gallardo y A. Ziliani, *Sobre las  $m$ -álgebras de Lukasiewicz generalizadas de orden  $n$* , LVIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Mendoza, Argentina, 2008.
- [3] C. Gallardo y A. Ziliani, *La variedad discriminadora de las  $m$ -álgebras de Lukasiewicz generalizadas de orden  $n$* , LIX Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA, U.N. de Mar del Plata, Argentina, 2009. [i br¿](#)
- [4] J. Vaz De Carvalho and T. Almada, *A generalization of the Lukasiewicz algebras*, *Studia Logica* 69 (2001), 329-338.
- [5] J. Vaz De Carvalho, *On the variety of  $m$ -generalized-Lukasiewicz algebras of order  $n$* , *Studia Logica* 94 (2010), 291-305.

---

**Autores: Manuel Abad, Cecilia Rossana Cimadamore y José Patricio Díaz Varela**

**Lugar: Departamento de Matemática, UNS; INMABB CONICET-UNS.**

**Expositor: Cecilia Rossana Cimadamore**

---

#### Equivalencia natural entre MV-álgebras monádicas y $l$ -grupos monádicos con unidad fuerte

En [2] Mundici definió el funtor  $\Gamma$  de la categoría de los  $l$ -grupos abelianos a la categoría de las MV-álgebras, y estableció una equivalencia natural entre MV-álgebras y  $l$ -grupos con unidad fuerte de orden. Anteriormente, Chang había asociado un grupo abeliano a una MV-álgebra pero su trabajo se restringía al caso totalmente ordenado ([1]).

En este trabajo definimos el concepto de  $l$ -grupo monádico, esto es un  $l$ -grupo (abeliano)  $\mathbf{G}$  enriquecido con un operador unario  $\exists: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  que satisface ciertos axiomas. Nuestro resultado principal consiste en una equivalencia entre la categoría de los  $l$ -grupos monádicos y la categoría de las MV-álgebras monádicas. Estas álgebras fueron definidas por Rutledge en [3]. La equivalencia obtenida extiende la equivalencia determinada por el funtor  $\Gamma$  para las MV-álgebras.

También estudiamos las congruencias de un  $l$ -grupo monádico y las caracterizamos por medio de ciertos  $l$ -ideales que hemos llamado  $l$ -ideales monádicos. Probamos que el retículo de  $l$ -ideales monádicos de un  $l$ -grupo monádico  $\mathbf{G}$  es isomorfo al retículo de  $l$ -ideales de  $\exists\mathbf{G}$ . Demostramos además que todo  $l$ -grupo monádico es producto subdirecto de una familia de  $l$ -grupos monádicos  $\{\mathbf{G}_i : i \in I\}$  donde  $\exists\mathbf{G}_i$  es una cadena para todo  $i \in I$ .

Por último, damos algunas aplicaciones de la equivalencia obtenida. Entre ellas, demostramos que si  $\mathbf{G}$  es un  $l$ -grupo monádico con unidad fuerte

de orden  $u$ , y consideramos la MV-álgebra monádica cuyo universo es el segmento  $[0, u]$  entonces existe un isomorfismo de orden entre el conjunto de los ideales monádicos del álgebra y el conjunto de los  $l$ -ideales monádicos de  $\mathbf{G}$ , ambos ordenados por inclusión.

Chang, C. C., *A new proof of the completeness of the-Lukasiewicz axioms*, Trans. Amer. Math. Soc., Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 93, pág. 74-80, 1959.

Mundici, Daniele, *Interpretation of AF C\*-algebras in-Lukasiewicz sentential calculus*, J. Funct. Anal., Journal of Functional Analysis, Vol. 65, Nro. 1, pág. 15-63, 1986.

Rutledge, J.D., *A preliminary investigation of the infinitely many-valued predicate calculus*, Phd. Thesis, Cornell University, 1959.

Abad, M., Cimadamore, C. R., y Díaz Varela, J. P., *Monadic MV-álgebras are equivalent to monadic l-groups with strong unit*, to appear.

---

**Autores: M. Campercholi y D. Vaggione**

**Lugar: FaMAF - UNC**

**Expositor: M. Campercholi**

---

### Funciones algebraicas y endoprimalidad

Sea  $\mathbf{A}$  un álgebra, y sean  $t_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m), s_i(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m), i = 1, \dots, k$ , términos tales que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} t_1(\bar{x}, \bar{z}) &= s_1(\bar{x}, \bar{z}) \\ &\vdots \\ t_k(\bar{x}, \bar{z}) &= s_k(\bar{x}, \bar{z}) \end{aligned}$$

tiene una única solución  $\bar{b} \in A^m$  para cada  $\bar{a} \in A^n$ . Un sistema con estas propiedades define implícitamente  $m$  funciones  $f_1, \dots, f_m : A^n \rightarrow A$ , donde  $(f_1(\bar{a}), \dots, f_m(\bar{a}))$  es el único  $\bar{b} \in A^m$  que cumple  $t_i(\bar{a}, \bar{b}) = s_i(\bar{a}, \bar{b}), i = 1, \dots, k$ . Una función  $f : A^n \rightarrow A$  será *algebraica* en  $\mathbf{A}$  si es posible definirla implícitamente por un sistema de ecuaciones en la manera arriba descrita. Las funciones algebraicas en  $\mathbf{A}$  son cerradas bajo composición, i.e., forman un clon.

La naturaleza sintáctica de la definición hace que en general el problema de determinar las funciones algebraicas de un álgebra pueda ser muy complicado. Sin embargo hay, dependiendo de propiedades particulares sobre el

álgebra, condiciones semánticas sobre una función que garantizan que sea algebraica. En nuestra comunicación expondremos resultados que caracterizan las funciones algebraicas en términos semánticos.

Un álgebra  $A$  se dice *endoprimal* si toda función que preserva los homomorfismos internos de  $A$  es representable por un término. Mostraremos también en nuestra charla como las técnicas que permiten estudiar las funciones algebraicas, en algunos casos, permiten también caracterizar las álgebras endoprimalas de una variedad.

# Matemática Discreta, Combinatoria y Optimización

*Organizan:*

*Liliana Alcón y Valeria Leoni*



**Conferencia Invitada**  
**Marcelo Mydlarz**  
**UNGS**

---

40 años de coloreo equitativo en 40 minutos

A un coloreo de los nodos de un grafo se lo llama *equitativo* si los tamaños de las clases de color difieren a lo sumo en uno. En 1970 Hajnal y Szemerédi demostraron la siguiente conjetura de Erdős: un grafo tal que ninguno de sus nodos tenga grado mayor que  $r$  admite un coloreo equitativo con  $r+1$  colores.

En esta charla visitaremos algunos de los trabajos que tienen origen en aquel famoso teorema, repasando resultados y problemas abiertos.

---

**Autores: Mariana Escalante y Pablo Fekete**  
**Lugar: FCEIA, Universidad Nacional de Rosario - CONICET**  
**Expositor: Pablo Fekete**

---

Sobre la Conjetura  $N_0$ - $N$  a partir de la relajación clique

Una forma de abordar el problema de la descripción de las facetas de la cápsula convexa de los puntos enteros de un poliedro  $P \subset [0, 1]^n$ ,  $P_I$ , es mediante los llamados  $\dot{\iota}$ .

Ellos se representan usualmente con un operador definido sobre el espacio de los politopos. Su reiterada aplicación a partir de  $P$  genera una secuencia de politopos, cada uno incluido en el anterior, que converge a  $P_I$  en a lo sumo  $n$  pasos.

En el presente trabajo, nos concentramos en dos de estos operadores, definidos por Lovász y Schrijver en [3], denominados  $N_0$  y  $N$ . Para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N_0^k(P) = N_0(N_0^{k-1}(P))$ , siendo  $N_0^0(P) = P$ . El *rango*  $N_0$  de  $P$  es  $r_0(P) = \min\{k : N_0^k(P) = P_I\}$ . Análogamente se definen  $N^k(P)$  y el *rango*  $N$  de  $P$ ,  $r(P)$ .

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , indicamos con  $STAB(G)$  a la cápsula convexa de los vectores característicos de los conjuntos estables en  $G$ . Consideramos como relajación inicial a la llamada relajación por arcos  $FRAC(G)$ .

Lovász y Shrijver probaron en [3], que  $N_0(FRAC(G)) = N(FRAC(G))$ , para cualquier grafo  $G$ . Este resultado motivó a Lipták y Tunçel a formular, en [2], las siguientes conjeturas:

**Conjetura  $N_0-N$ :**  $N_0^k(FRAC(G)) = N^k(FRAC(G))$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  y cualquier grafo  $G$ .

**Conjetura de los rangos:**  $r_0(FRAC(G)) = r(FRAC(G))$  para cualquier grafo  $G$ .

En [1], Au y Tunçel probaron la falsedad de la Conjetura  $N_0-N$ , mientras que la segunda permanece abierta, habiendo sido verificada sólo para familias particulares de grafos.

En nuestro trabajo consideramos la Conjetura  $N_0-N$  pero partiendo de la relajación clique de  $STAB(G)$ . Probamos que también esta conjetura es falsa utilizando resultados sobre la subdivisión impar de un grafo.

Nos proponemos continuar analizando el comportamiento de los operadores sobre grafos obtenidos por subdivisión estrella de un nodo y subdivisión impar de un arco.

Y. Au, L. Tunçel, *On the polyhedral lift-and-project methods and the fractional stable set polytope*. Discret Optim. 6 (2009), pp. 206–213.

L. Lipták, L. Tunçel, *The stable set problems and the lift-and-project ranks of graphs*. Mth. Programming B 98(2003), pp. 319–353.

L. Lovász, A. Schrijver, *Cones of matrices and set-functions and 0–1 optimization*. Siam J. Optim. 1 (1991), pp. 166–190.

---

**Autores:** Silvia Bianchi, Mariana Escalante, M. Susana Montelar

**Lugar:** CONICET y FCEIA, (UNR)

**Expositor:** Mariana Escalante

---

#### Índice de profundidad de facetas para problemas de cubrimiento en matrices circulantes

Dada una matriz  $M$  de entradas 0,1, consideramos el poliedro  $Q(M) = \{x \geq 0 : Mx \geq 1\}$ . La cápsula convexa de las soluciones enteras en  $Q(M)$ ,  $Q^*(M)$ , es el *poliedro de cubrimiento de conjuntos* de  $M$ . En el caso que todos los puntos extremos de  $Q(M)$  sean enteros, la matriz  $M$  se llama *ideal*. Si bien las matrices ideales no han sido aún completamente caracterizadas, los operadores lift-and-project proveen una forma de clasificar cuán *lejos* de la idealidad se encuentra una matriz 0,1. Partiendo de un poliedro  $Q \subseteq [0,1]^n$ , estos operadores obtienen la descripción de la cápsula convexa de las soluciones enteras en  $Q$ ,  $Q^*$ , a través de a lo sumo  $n$  iteraciones. Entonces, se define el *rango* de un operador como el menor número de iteraciones necesarias para obtener  $Q^*$  a partir de  $Q$ .

Balas, Ceria y Cornuéjols presentan en [1] el operador disyuntivo, un operador lift-and-project, que preserva la estructura combinatoria del problema original.

En [2] definimos la profundidad de facetas de acuerdo al operador disyuntivo para poliedros de cubrimiento asociados a matrices 0,1. En particular, estudiamos  $Q^*(M)$  cuando  $M$  es una matriz circulante  $C_n^k$ : la matriz con  $n$  columnas y cuyas filas son los vectores de incidencia de los conjuntos  $\{i, i+1, \dots, i+k-1\}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donde  $2 \leq k \leq n-2$  y la suma es módulo  $n$ . También en [2] identificamos las facetas de mayor profundidad para el poliedro de cubrimiento definido por las matrices  $C_{sk}^k$  cuando  $s \geq k+1$ . Por otra parte, Goemans definió en [3] una medida de profundidad de facetas en el contexto de algoritmos de planos de corte. En [2] obtuvimos que las facetas de máxima profundidad para ambas medidas, son las mismas cuando consideramos las matrices  $C_{sk}^k$  y  $s \geq k+1$ .

En este trabajo completamos los resultados anteriores hallando el rango disyuntivo del poliedro de cubrimiento asociado a las matrices  $C_{sk}^k$  para  $s \leq k$ . También en este caso pudimos comprobar que las facetas de máxima profundidad son las mismas de acuerdo a las dos medidas consideradas.

Balas, E., S. Ceria, and G. Cornuéjols, *A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs*, Mathematical Programming **58** (1993), 295–324.

Bianchi S., Escalante M., Montelar M.S., *Lift-and-project rsnks of the set covering polytope of circulant matrices*, preprint (2010).

Goemans M., *Worst-case comparison of Valid Inequalities for the TSP*, Mathematical Programming **69** (1995), 335–349.

---

### Conferencia Invitada

Graciela Nasini

UNR

---

Instancias polinomiales del problema del conjunto estable de peso máximo:  
una clase que contiene estrictamente a los grafos perfectos

El *Problema del Conjunto Estable de Peso Máximo* (PCE) es uno de los problemas de optimización combinatoria  $NP$ -difíciles más estudiados en el área. En 1981, M. Grötschel, L. Lovász y A. Schrijver prueban la polinomialidad del PCE sobre grafos perfectos. De esta manera, los grafos perfectos resultan una de las clases más amplias sobre las cuales el problema es polinomial.

La prueba de Grötschel et al. se basa en la formulación del PCE en grafos perfectos como problema de programación *semidefinida positiva* (SDP), un área de la matemática que parecía tener muy poca intersección con la optimización combinatoria. Sorprendentemente, pasados 30 años, no han surgido algoritmos polinomiales alternativos de naturaleza más combinatoria y que prescindan de la programación SDP. Este hecho revaloriza el rol de las relajaciones SDP de problemas combinatorios.

En particular en este trabajo, se consideran las relajaciones SDP obtenidas a partir del operador  $N_+$  definido por L. Lovász y A. Schrijver. El comportamiento de este operador sobre la relajación por arcos del politopo de conjuntos estables permite probar la polinomialidad del PCE sobre otras clases infinitas de grafos no perfectos: grafos near-bipartitos,  $t$ -perfectos y  $a$ -perfectos.

En esta charla se presenta una clase de grafos  $\mathcal{G}$  sobre la cual el PCE es polinomial y que contiene estrictamente a todas las clases mencionadas (perfectos, near-bipartitos,  $t$ -perfectos y  $a$ -perfectos). Los grafos en  $\mathcal{G}$  son aquellos para los cuales todas las desigualdades que definen facetas de su politopo de conjuntos estables tienen un grafo soporte near-bipartito.

Esta nueva familia abre numerosas preguntas entre las que se encuentran la caracterización a través de menores prohibidos, la complejidad computacional de su problema de reconocimiento, la determinación de familias infinitas de grafos contenidas en  $\mathcal{G}$ , entre otras. Los estudios preliminares indican que las respuestas a estas nuevas preguntas requerirán fuertemente resultados provenientes tanto desde la teoría de grafos como desde la combinatoria poliedral.

---

**Autores:** Gabriela Argiroffo, Graciela Nasini, Pablo Torres  
**Lugar:** Universidad Nacional de Rosario-CONICET  
**Expositor:** Pablo Torres

---

#### Coloreo de empaquetamiento en ciertas familias de árboles

Numerosos problemas, como asignaciones de vuelos, asignaciones de frecuencias y problemas de almacenamiento, pueden ser modelados como problemas de coloreo en grafos. En general, la naturaleza de cada aplicación impone restricciones adicionales, dando lugar a diferentes clases de coloreos (ver, por ejemplo, [3] y [6]).

En particular, un *k*-coloreo de empaquetamiento de un grafo  $G$  es una asignación de los colores  $\{1, 2, \dots, k\}$  a sus vértices de manera tal que dos vértices pueden compartir el color  $i$  si la distancia entre ellos es al menos  $i + 1$ . El número *p*-cromático de  $G$ , que notamos  $\chi_p(G)$ , es el mínimo  $k$  tal que  $G$  admite un  $k$ -coloreo de empaquetamiento.

Si bien existen algoritmos polinomiales para calcular  $\chi_p(G)$  en grafos split [5] y grafos  $P_4$ -tidy [1], el problema es *NP*-difícil, aún en familias particulares de grafos como los árboles [4]. Sin embargo, se conocen subfamilias de árboles donde el problema es polinomial. En particular, Sloper [7] probó que es menor que 7 para árboles de máximo grado a lo sumo 3, pero es no acotado para árboles de máximo grado a lo sumo 4.

En este trabajo hallaremos nuevas familias de árboles donde el cálculo de  $\chi_p(G)$  es polinomial.

G. Argiroffo, G. Nasini, P. Torres: *The packing coloring problem on  $P_4$ -tidy graphs*. Anales de ALIO-INFORMS Joint International Meeting.

B. Courcelle, *The monadic second-order logic of graphs iii: tree decompositions, minors and complexity issues*, ITA 26 (1992) pp. 257–286.

J. Dunbar, D. Erwin, T.W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Broadcast in graphs*, Discrete Applied Mathematics 154 (2006) pp. 59–75.

J. Fiala, P. Golovach, *Complexity of the packing coloring problem of trees*, Discrete Applied Mathematics 158 (7) (2010) pp. 771–778.

W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Harris, D. Rall, *Broadcast Chromatic Numbers of Graphs*, Ars Combinatoria 86 (2008) pp. 33–49.

J. R. Griggs, R. K. Yeh, *The  $L(2,1)$ -labelling problem on graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 9 (1996) pp. 295–377.

C. Sloper, *An eccentric coloring of trees*, Australas. J. Combin. 29 (2004) pp. 309–321.

---

**Autores: Adrián Pastine, Daniel A. Jaime**

**Lugar: Universidad Nacional de San Luis**

**Expositor: Daniel A. Jaime**

---

### A condition of Hamiltonicity over Cayley digraphs on generalized dihedral groups

The *Cayley digraph* on a group  $G$  with generating set  $S$ , denoted  $\overrightarrow{Cay}(G; S)$ , is the digraph with vertex set  $G$ , and arc set containing an arc from  $g$  to  $gs$  whenever  $g \in G$  and  $s \in S$  (if we ask  $S = S^{-1}$  and  $e \notin S$ , we have just a Cayley graph). Cayley (di)graphs of groups have been extensively studied and

some interesting results have been obtained (see [3]). In particular, several authors have studied the following folk conjecture: every Cayley graph is Hamiltonian (see [4]). Another interesting problem is to characterize which Cayley digraphs have Hamiltonian paths. These problems tie together two seemingly unrelated concepts: traversability and symmetry on (di)graphs.

Both problems had been attacked for more than fifty years (started with [5]), yet not much progress has been made and they remain open. Most of the results proved thus far depend on various restrictions made either on the class of groups dealt with or on the generating sets (for example one can easily see that Cayley graphs on Abelian groups have Hamilton cycles). The class of groups with cyclic commutator subgroups has attracted attention of many researchers (see [2]). And for many technical reasons the key to proving that every connected Cayley Graphs on a finite group with cyclic commutator subgroup has a Hamilton cycle very likely lies with dihedral groups.

Given a finite abelian group  $H$ , the generalized dihedral group over  $H$  is

$$D_H = \langle H, \tau : \tau^2 = e \quad \tau h \tau = h^{-1} \quad \forall h \in H \rangle$$

Recently (2010) in [1], working on generalized dihedral groups, was proved that every Cayley graph on the dihedral group  $D_{2n}$  with  $n$  even has a Hamilton cycle. We prove in this work, via a recursive algorithm, that if  $S \cap H \neq \emptyset$ , then  $\overrightarrow{Cay}(D_H, S)$  is Hamiltonian.

B. Alspach, C. C. Chen & M. Dean. *Hamilton paths in Cayley graphs on generalized dihedral groups*. ARS Mathematica Contemporanea 3(2010) 29-47.

B. Alspach, & Zhang C-Q. *Hamilton cycles in cubic Cayley graphs on dihedral groups*. ARS Combinatorica 28(1989), pp.101-108.

N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

S. J. Curran & J. A. Gallian. *Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs-A survey*. *Discrete Mathematics* 156 (1996) 1-18.

E. Rapaport-Strasser. *Cayley color groups and Hamilton lines*. *Scripta Math.* 24 (1959) 51-58.

---

**Autores: Patricia Dobson, Valeria Leoni y Graciela Nasini**

**Lugar: Universidad Nacional de Rosario - CONICET**

**Expositor: Valeria Leoni**

---

Reducciones polinomiales entre los problemas de empaquetamientos limitados y de conjuntos dominantes en grafos

Dado un grafo  $G = (V, E)$  y un entero no negativo  $k$ , un subconjunto  $P$  de  $V$  es un  $k$ -empaquetamiento limitado de  $G$  si en la vecindad cerrada de todo

vértice hay **a lo sumo**  $k$  elementos de  $P$  [2]. Similarmente, si en la vecindad cerrada de todo vértice hay **al menos**  $k$  elementos de  $P$ , decimos que  $P$  es una  $k$ -upla dominante de  $G$  [3].

Estos conceptos proveen de modelos a muchos problemas de ubicación de servicios como pueden ser, respectivamente, la ubicación de contenedores de basura en las esquinas de una ciudad, o de sensores de seguridad de una red de vigilancia. Para  $G$  y  $k$  dados, nos interesa hallar un  $k$ -empaquetamiento limitado de cardinal máximo y una  $k$ -upla dominante de cardinal mínimo.

Ambos problemas son NP-difíciles sobre grafos generales. En particular, cuando  $k = 1$ , el problema de dominancia es el conocido Problema del Conjunto Dominante, y su complejidad computacional ha sido extensamente estudiada en numerosas clases de grafos. Para  $k$  general, los resultados para ambos problemas son más escasos. Sin embargo, resulta notoria la similitud de los mismos desde el punto de vista de la complejidad computacional.

En este sentido, se sabe que los dos problemas son polinomiales en grafos fuertemente cordales ([1] y [4]) y en grafos  $P_4$ -tidy [2], mientras que ambos son NP-difíciles en grafos split ([1] y [4]). Hasta el momento no se conoce una clase de grafos donde uno de los problemas resulte polinomial y el otro NP-difícil, ni tampoco una prueba de equivalencia de los mismos. Por otra parte, en [4] se probó que sobre grafos bipartitos, el problema de dominancia es NP-difícil mientras que la complejidad del problema del empaquetamiento limitado era desconocida.

En este trabajo presentamos una reducción polinomial del problema del empaquetamiento al problema de dominancia y también una reducción polinomial del problema de dominancia al problema del empaquetamiento. De esta manera, ambos problemas resultan equivalentes sobre clases de grafos que son cerradas bajo ambas transformaciones. En particular, estas transformaciones nos permiten demostrar que el problema del empaquetamiento limitado en grafos bipartitos es también NP-completo.

[1] M. P. Dobson, V. Leoni and G. Nasini, *The  $k$ -limited packing and  $k$ -tuple domination problems in strongly chordal,  $P_4$ -tidy and split graphs*. Short Communication in ENDM (2010). To appear. <http://combinatoria.fceia.unr.edu.ar/pdf/limitedpackingISCO.pdf>

[2] R. Gallant, G. Gunther, B. Hartnell and D. Rall, *Limited Packings in graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **30** (2008), 15–20, and to appear in DAM.

[3] F. Harary and T. W. Haynes, *Double domination in graphs*, Ars Combinatoria **55** (2000), 201–213.

[4] C. Liao and G. J. Chang,  *$k$ -tuple domination in graphs*, Inform. Process. Letters, **87** (2003), 45–50.

**Autores:** María P. Mazzoleni, Marisa Gutierrez  
**Lugar:** UNLP - FCE - Dto. de Matemática  
**Expositor:** María P. Mazzoleni

---

### Árboles filogenéticos: grafos hoja-potencias

El presente trabajo está basado en el survey de A. Brandstädt: "Leaf Powers, Phylogenetic Trees and Substitution of Clique".

Un problema fundamental en biología es reconstruir la evolución histórica de un conjunto de especies basándose en datos biológicos cuantitativos. Generalmente, la historia de la evolución es modelada por un árbol de evolución denominado **filogénea**, el cual es un árbol cuyas hojas representan especies y cada vértice interno da origen a dos o más especies nuevas.

Se dan los conceptos de **k-hoja raíz** y **k-hoja raíz básica** los cuales son necesarios para tratar este tipo de problemas.

Un árbol  $T$  es un **k-hoja raíz** de un grafo finito no dirigido  $G = (V, E)$  si el conjunto de hojas de  $T$  es  $V$  y para cualesquiera dos vértices  $x$  e  $y \in V$ ,  $xy \in E$  si y sólo si la distancia de  $x$  e  $y$  en  $T$  es a lo sumo  $k$ . Un grafo  $G$  es una **k-hoja potencia** si tiene una **k-hoja raíz**; éste es una **hoja potencia** si tiene una hoja raíz para algún  $k \geq 2$ .

Una **k-hoja raíz**  $T$  de una **k-hoja potencia**  $G$  es **básica** si todo vértice interno de  $T$  es adyacente a lo sumo a una hoja. Una **k-hoja potencia** es **básica** si tiene una **k-hoja raíz básica**.

Además, se dan algunos resultados básicos de grafos hoja potencia, y de la sustitución de completos en grafos hoja potencia básicos. En particular, se estudia la estructura de las 3-hoja potencia y de las 4-hoja potencia básicas.

Se observa que los grafos 5-hoja potencia son muy difíciles de caracterizar, aunque actualmente se ha descubierto un algoritmo de tiempo lineal para reconocerlos. Mientras que la caracterización de **k-hoja potencia** para  $k > 5$  es un problema que queda abierto.

**Autores:** Pablo de Caria, Marisa Gutierrez  
**Lugar:** UNLP - FCE - Dto. de Matemática  
**Expositor:** Pablo de Caria

---

Sobre la correspondencia entre representaciones arbóreas de grafos cordales y dualmente cordales

Los *grafos cordales* son definidos como aquellos grafos cuyos ciclos de longitud mayor o igual que cuatro poseen una cuerda. Una condición necesaria y suficiente para que un grafo  $G$  sea cordal es la existencia de un *árbol clique*  $T$  [2], el cual está definido de la siguiente manera: sus vértices son los cliques de  $G$ , es decir, los conjuntos maximales de vértices adyacentes de  $G$ , y se cumple que, para cada vértice  $v$  de  $G$ , el conjunto de cliques que tienen a  $v$  como elemento induce un subárbol de  $T$ .

Llamamos *grafo clique* de  $G$  o  $K(G)$  al grafo cuyos vértices son los cliques de  $G$ , siendo dos de ellos adyacentes si y sólo si comparten vértices. El conjunto de todos los grafos clique de grafos cordales forma una clase que ha sido bautizada como *grafos dualmente cordales*. Estos también poseen una caracterización en términos de árboles: un grafo  $G$  es dualmente cordal si y sólo si existe un árbol  $T$  generador de  $G$  tal que todo clique de  $G$  induce un subárbol de  $T$  [1]. A este tipo de árboles los llamamos *compatibles* con  $G$ .

No es difícil demostrar que, dado  $G$  grafo cordal, todo árbol clique de  $G$  es compatible con  $K(G)$ , aunque la recíproca no siempre vale. Justamente, nuestros objetivos serán dos:

1. Dado un grafo cordal  $G$ , hallar la manera de determinar si todo árbol clique de  $G$  es compatible con  $K(G)$  y viceversa.
2. Dado un grafo dualmente cordal  $G$ , caracterizar a todos los grafos cordales que tienen a  $G$  como grafo clique para los cuales se dé la correspondencia árbol clique/árbol compatible que se acaba de mencionar.

Esto requerirá encontrar un método para generar todos los conjuntos de vértices tales que cada uno de ellos induce un subárbol de todo árbol clique/compatible de un grafo cordal/dualmente cordal. A su vez, como consecuencia de este trabajo también se desprenderá cómo ciertas propiedades de los grafos clique de grafos cordales se corresponden de modo natural con otras propiedades de los árboles compatibles con grafos dualmente cordales. Un ejemplo de esto está dado por el hecho de que ambas clases de árboles son de peso máximo para ciertas valuaciones especiales de sus aristas.

A. Brandstädt, F. Dragan, V. Chepoi and V. Voloshin, *Dually chordal graphs*, Proceedings of the 19th International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Comp. Sci. 790 (1994), pp. 237-251.

Y. Shibata, *On the tree representation of chordal graphs*, J. Graph Theory, 12 (1988), pp. 421-428.

---

**Conferencia Invitada**

**Min Chih Lin**

**UBA**

---

Reconocimiento de Grafos Arco-Circulares Unitarios

Un grafo arco-circular (CA)  $G$  es el grafo intersección de arcos sobre un círculo. El círculo y los arcos conforman un modelo arco-circular de  $G$ . Un grafo arco-circular unitario (UCA) es un grafo CA que admite un modelo llamado UCA donde los arcos tienen el mismo tamaño. Un grafo arco-circular propio (PCA) es un grafo CA que admite un modelo llamado PCA donde ningún arco puede contener al otro. Tucker en 1974, había probado que los grafos UCA son exactamente los grafos PCA que no contienen como subgrafos inducidos cierta familia de grafos llamados  $CI(n, k)$ . El reconocimiento de los grafos UCA fue desarrollado mucho más reciente: a) Durán, Gravano, McConnell, Spinrad y Tucker (2006) propusieron el primer algoritmo de reconocimiento de tiempo polinomial ( $O(n^2)$ ) que no provee ningún tipo de certificados; b) Lin y Szwarcfiter (2008) dieron el primer algoritmo lineal que además brinda un modelo UCA como certificado positivo. Este algoritmo utiliza un tipo de estructura llamada segment digraphs; c) Kaplan y Nussbaum (2009) presentaron otro algoritmo lineal que provee un certificado negativo cuando el grafo en cuestión es PCA pero no UCA. Este certificado no es precisamente un subgrafo inducido  $CI(n, k)$  como uno esperaría sino otras estructuras relacionadas llamadas  $(m, l)$ -independent set maximal y  $(p, q)$ -circuit minimal que verifican  $\frac{m}{l} = \frac{p}{q}$ . En este trabajo, realizamos un estudio más profundo sobre los segment digraphs y los resultados obtenidos permitieron extender el algoritmo propuesto en (b) de manera tal que es capaz de encontrar un subgrafo inducido  $CI(n, k)$  cuando el grafo pertenece a  $PCA \setminus UCA$ . El nuevo algoritmo sigue siendo de tiempo lineal y no requiere utilización de estructuras adicionales.

**Autores:** Flavia Bonomo, Guillermo Durán, Luciano Grippo, Martín Safe  
**Lugar:** CONICET, FCEN, Universidad de Buenos Aires, Universidad de Chile e ICI  
**Expositor:** Luciano Grippo

---

#### Caracterización de grafos probe de bloques por subgrafos prohibidos

Dada una familia de grafos  $\mathcal{G}$ , se dice que un grafo  $G$  es probe  $\mathcal{G}$  si sus vértices pueden ser particionados en dos conjuntos:  $P$  (vértices probe) y un conjunto independiente  $N$  (vértices no probe), de forma tal que al conjunto independiente  $N$  se le puede agregar aristas de modo que el grafo resultante pertenezca a la clase  $\mathcal{G}$ . Los grafos probe  $\mathcal{G}$  han sido estudiados para diferentes clases de grafos  $\mathcal{G}$ . En este trabajo estudiamos los grafos probe de bloques, clase que posee un reconocimiento en tiempo polinomial [2] y es una subclase de los grafos probe cordales estudiados en [1]. Para dicha clase presentamos una caracterización por subgrafos prohibidos.

M.C. Golumbic and M. Lipshteyn. Chordal probe graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 143, 2004, 221–237.

M-S. Shang, L-J. Hung, T. Kloks and S-L. Peng. Block-graph width *Lecture Notes in Computer Science*, 5532, 2009, 150–157.

---

**Autores:** Liliana Alcón, Luerbio Faria, Celina M. H. de Figueiredo, Marisa Gutierrez  
**Lugar:** Universidad Nacional de La Plata- Universidad Federal de Río de Janeiro  
**Expositor:** Liliana Alcón

---

#### Reconocimiento de grafos clique en la clase de grafos split

Un *clique* de un grafo es un subconjunto maximal de vértices mutuamente adyacentes. Varios problemas relacionados con los cliques de un grafo han sido estudiados en las últimas décadas [2].

Un grafo  $G$  se dice un *Grafo Clique* si es el grafo intersección de los cliques de algún grafo  $H$ . En [1], se probó que el problema de reconocimiento de los grafos clique es NP-completo. Poco se sabe sobre clases no triviales de grafos en las cuales este problema sea polinomial. Los ejemplos conocidos son subclases de la clase de grafos clique Helly la cual está contenida en la

clase de los grafos clique. Un grafo es clique Helly si la familia de sus cliques tiene la propiedad de Helly.

Un grafo es *split* si su conjunto de vértices puede particionarse en un conjunto estable (vértices mutuamente no adyacentes) y un completo (vértices mutuamente adyacentes). La clase de los grafos split no está contenida en la clase de los grafos clique ni contiene a la clase de los grafos clique Helly.

En este trabajo comenzamos el estudio del problema de reconocimiento de los grafos clique restringido a la clase de los grafos split.

L. Alcón, L. Faria, C. M. H. de Figueiredo and M. Gutierrez, The complexity of clique graph recognition, *Theoretical Computer Science*, 410, (2009), pp 2072–2083.

J. L. Szwarcfiter, A survey on Clique graphs, *Recent Advances in Algorithmic Combinatorics*, C. Linhares-Sales and B. Reed, eds., Springer-Verlag, 2002.

---

**Autores:** Flavia Bonomo, Mitre C. Dourado, Guillermo Durán, Luerbio Faria, Luciano N. Grippo y Martín D. Safe

**Lugar:** CONICET, FCEN, Universidad de Buenos Aires, NCE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, FCFM, Universidad de Chile e ICI, Universidad Nacional de General Sarmiento

**Expositor:** Martín D. Safe

---

#### Caracterización de los grafos arista-perfectos por subgrafos prohibidos

Un subgrafo por aristas es un subgrafo inducido que se obtiene quitando un conjunto de aristas junto con sus extremos. Un grafo es arista-perfecto [1] si en cada uno de sus subgrafos por aristas el número matching coincide con el número transversal. Recientemente, se ha probado que el reconocimiento de los grafos arista-perfectos es un problema NP-difícil [2]. En este trabajo caracterizamos los grafos arista-perfectos por subgrafos por aristas prohibidos.

M. Escalante, V. Leoni, and G. Nasini. A graph theoretical model for total balancedness of combinatorial games. Enviado, 2009.

V. Leoni, M. Dobson, and G. Nasini. The computational complexity of the Edge-Perfect Graph and the Totally Balanced Packing Game recognition problems. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36, 2010. En prensa.

**Conferencia Invitada**  
**Nélida Echebest**  
**UNLP**

---

Regularización implícita de Cuadrados Mínimos en Reconstrucción de Imágenes

En muchas aplicaciones, en particular en problemas de reconstrucción de imágenes, los sistemas discretizados son inconsistentes y muy frecuentemente de rango deficiente.

En varios problemas de reconstrucción tomográfica de imagen la limitación del rango de los rayos determina que el modelo discretizado resulte indeterminado, mal condicionado y de rango deficiente. El espacio nulo es no trivial y la solución de mínima norma puede estar lejos de la verdadera imagen.

El objetivo de este trabajo es mejorar la eficiencia del algoritmo IOP, que usa proyecciones oblicuas incompletas para resolver el problema de cuadrados mínimos, introduciendo la regularización del problema mediante un procedimiento implícito en el mismo. Este procedimiento realiza conjuntamente la optimización de la norma del residuo y de la función de regularización. Se analizarán las propiedades teóricas del nuevo algoritmo y se presentarán experiencias numéricas que comparan su comportamiento en relación al de otras versiones previas y al algoritmo RAMLA. Los problemas testeados provienen de problemas de reconstrucción simulados en geotomografía electromagnética y otros de tomografía computada del sistema SNARK. Estos resultados muestran que el nuevo algoritmo mejora la calidad de las imágenes reconstruidas.

---

**Autores: Damián Fernández**  
**Lugar: FaMAF - UNC**  
**Expositor: Damián Fernández**

---

Convergencia del método del Lagrangeano aumentado a soluciones degeneradas

La complejidad de los modelos matemáticos actuales han puesto en evidencia la carencia de métodos para resolver problemas degenerados [1, 3]. La mayoría de los métodos computacionales presentes en la literatura garantizan convergencia solo para problemas no degenerados, i.e., aquellos donde

la (localmente única) solución del problema posee *un único* multiplicador de Lagrange asociado.

En [2], se ha demostrado que el método de programación cuadrática secuencial estabilizado (sSQP), es eficiente para resolver problemas degenerados. La estabilización, puede verse como una regularización tipo proximal del problema dual. Así, su comparación con el método del Lagrangeano aumentado resulta inevitable (cf. [4]).

En este trabajo mostraremos que el método del Lagrangeano aumentado también es efectivo para la resolución de problemas degenerados. Además, de este análisis obtenemos que el método sSQP es un método de Lagrangeano aumentado *inexacto*.

M. Anitescu. A superlinearly convergent sequential quadratically constrained quadratic programming algorithm for degenerate nonlinear programming. *SIAM J. Optim.*, 12(4):949–978, 2002.

D. Fernández and M. V. Solodov. Stabilized sequential quadratic programming for optimization and a stabilized Newton-type method for variational problems. *Math. Program.* DOI 10.1007/s10107-008-0255-4.

A. Fischer. Local behavior of an iterative framework for generalized equations with nonisolated solutions. *Math. Program.*, 94(1, Ser. A):91–124, 2002.

R. T. Rockafellar. Lagrange multipliers and optimality. *SIAM Rev.*, 35(2):183–238, 1993.

---

**Autores:** María C. Maciel, Sandra A. Santos, Graciela N. Sottosanto

**Lugar:** Universidad Nacional del Sur, Universidad Estadual de Campinas (Brasil), Universidad Nacional del Comahue

**Expositor:** Graciela N. Sottosanto

---

#### Condiciones de optimalidad basadas en arcos para problemas de optimización multiobjetivo

En programación no lineal, las calificaciones sobre las restricciones del problema, juegan un rol preponderante cuando se derivan condiciones necesarias de primer y segundo orden del tipo Karush-Kuhn-Tucker. Si bien optimización multiobjetivo puede ser vista como una extensión de optimización escalar, la pregunta obvia es de qué manera los resultados obtenidos para el caso escalar pueden extenderse al caso multiobjetivo.

Este trabajo se focaliza sobre las condiciones de optimalidad para el problema de optimización multiobjetivo con restricciones de igualdad y desigualdad. La diferencia entre calificaciones de las restricciones y regularidad se establece

claramente. La propiedad de conjuntos de gradientes positivo lineal dependientes se utiliza para presentar una clasificación de puntos que satisfacen las ecuaciones de Fritz-John. Para asegurar la existencia de multiplicadores asociados a soluciones del problema se presentan condiciones de primer y segundo orden basadas en la existencia de arcos factibles.

Similitudes y diferencias entre los casos escalar y multiobjetivo, con respecto a las condiciones necesarias de optimalidad de segundo orden, se ponen de manifiesto.

---

**Autores: Liliana Zaragoza**

**Lugar: Universidad Nacional de Cuyo**

**Expositor: Liliana Zaragoza**

---

#### Convergencia de Conos y Conjuntos convexos en la Estabilidad de Sistemas de inecuaciones lineales semi-infinitos

Un posible enfoque para la estabilidad de sistemas de inecuaciones lineales es a partir del estudio del espacio de parámetros. El conjunto de todos los sistemas en  $R^n$  puede ser analizado a partir de la convergencia de los conos característicos y conjuntos convexos asociados con los sistemas. En este contexto es indispensable el análisis de la convergencia de una sucesión de conos y de conjuntos convexos. Dichas convergencias poseen características especiales:

• Para una sucesión de conos de  $R^n$  los límites interior, superior y el límite, si existe, es un cono. Además si cada cono de la sucesión es no nulo el límite superior es no nulo.

• Para una sucesión de conjuntos convexos el límite interior y el límite, si existe, es un conjunto convexo, pero no necesariamente el límite superior.

**Conferencia Invitada**  
**Irene Loiseau**  
**UBA**

---

Problemas de optimización combinatoria en el diseño de redes de comunicación

Desde que se introdujo la tecnología de fibra óptica a comienzos de los 90 se formularon nuevos problemas de optimización para modelar el diseño y ruteo en redes de comunicaciones. Algunos de ellos son problemas de optimización combinatoria muy difíciles de resolver y es interesante seguir estudiándolos a pesar de los cambios en las tecnologías. Una red de comunicaciones se llama "superviviente" (survivable) si se pueden reestablecer las comunicaciones entre los puntos que conecta a través de caminos alternativos cuando alguna de sus componentes falla. Diseñar una red que sobreviva a cualquier número o tipo de fallas simultáneas es muy caro, pero como se considera que es poco probable que ocurran fallas que afecten a más de un link o nodo al mismo tiempo se considera que una topología 2-conexa provee suficiente seguridad. Dado que la solución óptima a este problema podría ser un circuito hamiltoniano, y esto puede implicar que el número de links que debe atravesar el tráfico de comunicaciones entre dos puntos sea muy grande se agrega la restricción de que todos los links estén incluidos en ciclos de longitud acotada. La tecnología llamada Self Healing Rings permite implementar, entre otras, una red con esta topología.

En términos de grafos parte del problema de diseñar este tipo de redes de anillos a costo mínimo se traduce en el problema de determinar el cubrimiento de costo mínimo de los ejes de un grafo por ciclos de longitud acotada (BCCP; Bounded Cycle Cover Problem). En esta charla presentaremos una revisión de algunos algoritmos exactos y heurísticos para el problema de diseñar este tipo de topología de anillos y para el BCCP.

Se presentará también un modelo de programación lineal entera para el problema de diseñar una red usando la estrategia de  $p$ -ciclos para la restaurar la red. Esta tecnología incorpora características de los anillos y de las tradicionales redes de malla.

## Teoría de Lie

*Organizan:*

*Alejandro Tiraboschi y Tim Bratten*



**Conferencia Invitada**  
**Nicolás Andruskiewitsch**  
**Universidad de Córdoba**

---

### Súper Álgebras de Hopf punteadas

Una súper álgebra de Hopf es un álgebra de Hopf en la categoría simétrica de súper espacios vectoriales, esto es munidos de una graduación sobre  $\mathbb{Z}/2$ . Se explicará la relación entre las súper álgebras de Hopf y las álgebras de Hopf, que permite reducir el problema de la clasificación de las primeras al de las segundas. En el contexto de las álgebras de Hopf punteadas, el problema de la clasificación contiene como una de las cuestiones más arduas a la determinación de las álgebras de Nichols de dimensión finita [AS]. Un importante resultado es la clasificación de las trenzas de tipo diagonal cuyas álgebras de Nichols de dimensión finita [H]. Sucintamente, se puede partir el conjunto de soluciones en 3 clases:

- Las trenzas de tipo estándar [A], cuyo invariante principal es una matriz de Cartan (de tipo finito).
- Las trenzas de tipo súper, relacionadas heurísticamente con cuantizaciones de súper álgebras de Lie [Y1, Y2].
- Un conjunto finito de trenzas de tipo diagonal cuya interpretación aún no fue dilucidada.

Se espera que el estudio sistemático iniciado en [AAY] de las súper álgebras de Hopf punteadas permita explicar la segunda clase y obtener una presentación eficiente de las correspondientes álgebras de Nichols.

N. Andruskiewitsch, I. Angiono e H. Yamane, en preparación.

I. Angiono, *On Nichols algebras with standard braiding*. Algebra and Number Theory Vol. 3, No. 1, 35-106 (2009).

N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf algebras*. En *Recent developments in Hopf algebra Theory*, MSRI Publications 43 (2002), 1-68, Cambridge Univ. Press.

I. Heckenberger, *Classification of arithmetic root systems*. Adv. Math. 220, 59-124 (2009).

H. Yamane, *Quantized enveloping algebras associated with simple Lie superalgebras and their universal R-matrices*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 30, No.1, 15-87 (1994).

\_\_\_\_\_, *On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 35, No. 3, 321-390 (1999).

Conferencia Invitada  
 P. Tirao  
 FAMAF(UNC)- CIEM

La cohomología de la sombra nilpotente de un Álgebra de Lie soluble

Sea  $\mathfrak{s}$  un álgebra de Lie soluble de dimensión finita sobre un cuerpo  $k$  algebraicamente cerrado de característica cero y sea  $\Lambda(\mathfrak{s}) = \{\lambda \in \mathfrak{s}^* : \lambda|_{\mathfrak{s}'} = 0\}$  el conjunto de caracteres de  $\mathfrak{s}$ . Para cada  $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{s})$ , sea  $H^*(\mathfrak{s}, \lambda)$  la cohomología de  $\mathfrak{s}$  con coeficientes en el módulo  $k_\lambda$ . Además del interés intrínseco, el cálculo de la cohomología de álgebras de Lie solubles tiene importantes conexiones con la geometría (ver por ejemplo [4], [5]).

Dado un  $\mathfrak{s}$ -módulo  $M$  de dimensión finita, sea  $\chi(M) \subset \Lambda(\mathfrak{s})$  el conjunto de pesos de  $M$ . Si  $\Lambda(\mathfrak{s})_0 = \{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{s}) : H^*(\mathfrak{s}, \lambda) \neq 0\}$  no es difícil probar que  $\Lambda(\mathfrak{s})_0 \subset \chi(\Lambda^*\mathfrak{s})$  y en particular  $\Lambda(\mathfrak{s})_0$  es un conjunto finito. En el trabajo [2] definimos la "Cohomología Total" de  $\mathfrak{s}$  como

$$TH^p(\mathfrak{s}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{s})_0} H^p(\mathfrak{s}, \lambda)$$

y estudiamos propiedades básicas de estos espacios. Es claro que si  $\mathfrak{s}$  fuera nilpotente, entonces  $TH^p(\mathfrak{s}) = H^p(\mathfrak{s})$  pues  $\Lambda(\mathfrak{n})_0 = 0$ . En general, probamos que  $TH^*(\mathfrak{s})$  comparte muchas de las propiedades que tienen los grupos de cohomología de las álgebras de Lie nilpotentes y en particular, satisfacen la propiedad de la dualidad de Poincaré  $TH^p(\mathfrak{s}) = TH^{n-p}(\mathfrak{s})$ , con  $n = \dim(\mathfrak{s})$ .

Más aún demostramos que para cada álgebra de Lie soluble  $\mathfrak{s}$  existe un álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{n}_\mathfrak{s}$  tal que  $TH^p(\mathfrak{s}) = H^p(\mathfrak{n}_\mathfrak{s})$  para todo  $p$ . La prueba de este resultado es de carácter existencial, y por lo tanto es natural preguntarse cómo obtener la estructura de (alguna)  $\mathfrak{n}_\mathfrak{s}$  a partir de la de  $\mathfrak{s}$ .

Sea  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{s}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{s}$  y sea  $\mathfrak{h}_0 \subset \text{End}(\mathfrak{s})$  el espacio vectorial generado por la parte semisimple de  $\text{ad}(X)$  con  $X \in \mathfrak{c}$ . Por un teorema de Zassenhaus (ver [3]) se ve que  $\mathfrak{h}_0$  es una subálgebra de Lie abeliana de  $\text{Der}(\mathfrak{s})$ . Resulta que el nilradical  $\mathfrak{n}(\mathfrak{s})$  de  $\mathfrak{h}_0 \ltimes \mathfrak{s}$  es un álgebra de Lie nilpotente de la misma dimensión de  $\mathfrak{s}$  y estamos trabajando en la prueba de que  $TH^p(\mathfrak{s}) = H^p(\mathfrak{n}(\mathfrak{s}))$  para todo  $p$ . En la literatura aparecen construcciones análogas a la de  $\mathfrak{n}(\mathfrak{s})$  en el contexto de grupos solubles y es natural llamarle a  $\mathfrak{n}(\mathfrak{s})$  la *sombra nilpotente* (nilshadow) de  $\mathfrak{s}$  (ver [1]).

[1] Auslander, J. and Tolimieri, R. *Splitting Theorems and the Structure of Solvmanifolds*, Ann. of Math., Vol. 92, pp. 164–173.

[2] Cagliero, L. and Tirao, P., *On the cohomology of the nilshadow of a solvable Lie algebra*, En preparación.

[3] Jacobson, N., *Lie algebras*, Courier Dover Publications, 1961.

- [4] Millionshchikov, D. V., *Cohomology of solvable Lie algebras, and solvmanifolds*, translation in *Math. Notes* 77 (2005), no. 1-2, 61-71.
- [5] Mostow, G. D. *Cohomology of topological groups and solvmanifolds*, *Ann. of Math.* (2) 73 1961 20-48.

---

**Autores:** María Alejandra Álvarez, Paulo Tirao  
**Lugar:** CIEM - FaMAF - UNC  
**Expositor:** María Alejandra Álvarez

---

#### Homología Adjunta de una familia de nilradicales 2-pasos nilpotentes

Dada una subálgebra parabólica  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita, se tiene  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$  donde  $\mathfrak{n}$  es el nilradical y  $\mathfrak{g}_1$  es el factor de Levi de  $\mathfrak{p}$ . La (co)homología  $H(\mathfrak{n}, V)$  donde  $V$  es una representación irreducible de  $\mathfrak{g}$  restringida a  $\mathfrak{n}$  es un  $\mathfrak{g}_1$ -módulo y su estructura fue determinada por Kostant en [K]. La representación adjunta de  $\mathfrak{n}$  no es restricción de una representación de  $\mathfrak{g}$  y por lo tanto el caso (co)homología adjunta  $H(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$  no está contenido en los casos de Kostant. Hasta el día de hoy, determinar la estructura de  $\mathfrak{g}_1$ -módulo de  $H(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$  sigue siendo un problema abierto. En [CT1] y [CT2] dicha estructura es determinada para dos casos: el álgebra de Lie de Heisenberg y el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre. En este trabajo describimos la homología adjunta de una familia de nilradicales 2-pasos nilpotentes de subálgebras parabólicas de  $\mathbb{A}_n$ .

Álvarez, M. A.; Tirao, P., *Adjoint homology of a family of 2-step nilpotent nilradicals*. In preparation.

Cagliero, L.; Tirao, P., *The cohomology of the cotangent bundle of Heisenberg groups*, *Adv. Math.* 181 No. 2, (2004), 276-307.

Cagliero, L.; Tirao, P., *The adjoint homology of the free 2-step nilpotent Lie algebra*, *Q. J. Math.* 53, No. 2, (2002), 125-145.

Kostant, B., *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, *Ann. Math.* (2) 74, (1961), 329-387.

**Autores:** Lina Jimenez, Amelia Barrionuevo  
**Lugar:** San Miguel de Tucumán  
**Expositor:** Lina Jimenez

---

Estructuras de Hom-Lie Algebras sobre  $sl(2, \mathbb{C})$

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra no asociativa tal que su producto  $[ , ]$  es antisimétrico, y sea  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  un homomorfismo de álgebras. Decimos que  $(\mathfrak{g}, \sigma)$  es una Hom-Lie álgebra si el producto cumple la identidad de Jacobi deformada por  $\sigma$  (o identidad de Jacobi “ $\sigma$ -deformada”) es decir si:

$$[\sigma(x), [y, z]] + [\sigma(y), [z, x]] + [\sigma(z), [x, y]] = 0.$$

para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  (Este concepto fue introducido en [1] para estudiar deformaciones de las álgebras de Witt y Virasoro).

De esta definición se deduce fácilmente que las álgebras de Lie son Hom-Lie Algebras tomando  $\sigma = Id$  en la igualdad anterior y por ello las Hom-Lie algebras son consideradas “deformaciones de las álgebras de Lie por un homomorfismo  $\sigma$ ”. En la comunicación presentada el año pasado se determinaron las estructuras de Hom-Lie algebras sobre el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3 y se realizó una clasificación de las mismas.

En este trabajo encontramos todas las estructuras de Hom-Lie Algebras sobre el álgebra de Lie  $sl(2, \mathbb{C})$  y su clasificación.

Al igual que lo realizado para el trabajo anterior, el criterio de clasificación utilizado se establece de acuerdo a la definición de Hom-Lie Algebras isomorfas introducida en [2].

J. T. Hartwig, D. Larsson, S. D. Silvestrov: “Deformations of Lie Algebras using  $\sigma$ -derivations”, *J. Algebra* 295 (2006), 314-361.

Q. Jin, X. Li: “Hom-Lie algebra structures on semi-simple Lie algebras”, *J. of Algebra* 319 (2008), 1398-1408

**Autores:** José Araujo y Tim Bratten  
**Lugar:** UNCPBA, Tandil  
**Expositor:** Tim Bratten

---

### El teorema de Kostant para $U(n,1)$

Consideramos el grupo  $G_0 = U(n,1) \subseteq G = GL(n+1, \mathbb{C})$ . Fijamos el subgrupo compacto maximal  $K_0 = U(n) \times U(1) \subseteq G_0$  y sea  $K = GL(n, \mathbb{C}) \times GL(1, \mathbb{C}) \subseteq GL(n+1, \mathbb{C})$  su complexificación. Sea  $T_0$  el toro maximal de  $K_0$  dado por el subconjunto de las matrices diagonales. Introducimos la variedad bandera  $X$  de subgrupos de Borel de  $G$ . Para cada  $x \in X$  sea  $B_x \subseteq G$  el subgrupo de Borel correspondiente. Supongamos que  $Q$  es uno de los  $n+1$   $K$ -órbitas cerrados en  $X$ . Entonces  $Q$  está contenido en una  $G_0$ -órbita abierto  $S \supseteq Q$ . El estabilizador en  $G_0$  de un punto  $x \in Q$  (que es el normalizador en  $G_0$  de  $B_x$ ) es el toro  $T_0$ . Supongamos que

$$\chi : T_0 \rightarrow \mathbb{C}^*$$

es un carácter. Entonces  $\chi$  determina un fibrado holomorfo cuyos haz de secciones denotamos con  $\mathcal{O}(\chi)$ . Sea  $\rho$  la mitad de la suma de las raíces positivas con respecto al punto  $x$  y asumimos que la derivada de  $\chi$  menos  $\rho$  es regular y antidominante. Denotamos  $q$  para la codimensión de  $Q$  en  $X$ . Entonces el grupo de cohomología con soporte compacto, en grado  $q$

$$M = H_c^q(S, \mathcal{O}(\chi))$$

es una representación irreducible de  $G_0$ . Sea  $y \in X$  y llamamos  $\mathfrak{n}_y = [\mathfrak{b}_y, \mathfrak{b}_y]$ . En este trabajo calculamos las  $\mathfrak{n}_y$ -grupos de homología

$$H_p(\mathfrak{n}_y, M).$$

En el caso de  $p = 0$  nuestro trabajo determina las imersiones de  $M$  en series principales.

- Beilinson, A. y Bernstein, J.; *A generalization of Casselman's submodule theorem*. Birkhäuser, Progress in Math. 40, Boston, 1983, pp. 35-52.
- Hecht, H. y Taylor, J.; *Analytic localization of group representations*. Adv. Math., 79 (1990), pp. 139-212.

**Autores:** Leandro Roberto Cagliero, Elda Graciela Canterle  
**Lugar:** FaMAF - Facultad de Ciencias Exactas, U. N. Salta  
**Expositor:** Elda Graciela Canterle

---

La homología de extensiones abelianas de la subálgebra de Borel de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Sea  $\mathfrak{b}$  la subálgebra de Borel de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , es decir el álgebra de Lie con base  $\{H, E\}$  y con corchete  $[H, E] = 2E$ . Para cada  $n$ , sea  $V_n$  la representación irreducible de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  de peso máximo  $n$ . Haciendo actuar  $\mathfrak{b}$  en  $V_n$  definimos el producto semidirecto  $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \ltimes V_n$ . Es claro que  $\mathfrak{b}_n$  es un álgebra de Lie soluble tal que  $\mathfrak{b}'_n$  es el álgebra de Lie filiforme estandar de dimensión  $n+2$ . Para cada carácter  $\lambda : \mathfrak{b}_n \rightarrow \mathbb{C}$  de  $\mathfrak{b}_n$ , sea  $H_*(\mathfrak{b}_n, \lambda)$  la homología de  $\mathfrak{b}_n$  con coeficientes en el módulo  $\mathbb{C}_\lambda$ . El objetivo de este trabajo es calcular  $H_*(\mathfrak{b}_n, \lambda)$  para todo  $\lambda$  y comparar el resultado global con homología (a coeficientes triviales) del álgebra de Lie filiforme estandar  $H_*(\mathfrak{b}'_n)$ .

En esta charla presentamos una fórmula para la dimensión de  $H_k(\mathfrak{b}_n, \lambda)$  para  $\lambda = 0$  y todo  $k, n$ . Esta fórmula se obtiene a partir de la clásica fórmula de Cayley-Sylvester para el carácter de  $\bigwedge^j V_n$  como  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -módulo (ver [1] o [2]) que puede a su vez ser expresada en términos de  $q$ -coeficientes binomiales (ver [3]). Confiamos en obtener una fórmula similar para todo  $\lambda$ .

- [1] Manivel, L. *An extension of the Cayley-Sylvester formula*, European Journal of Combinatorics 28 (2007) 1839-1842.
- [2] Springer, T.A., *Invariant Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585, Springer-Verlag, 1977.
- [3] Stanley, R. P., *Enumerative combinatorics Volume 2*, Cambridge University Press, 2001.

---

**Autores:** Isolda Cardoso, Linda Saal  
**Lugar:** UNR - UNC  
**Expositor:** Isolda Cardoso

---

Solución fundamental de ciertos operadores diferenciales de segundo orden en el grupo de Heisenberg

Sea  $\mathbb{H}_n$  el grupo de Heisenberg  $(2n + 1)$ -dimensional y sea  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\}$  una base de su álgebra de Lie. El álgebra de operadores diferenciales invariantes a izquierda que conmutan con la acción

de  $U(p, q)$ ,  $p + q = n$ , está generada por

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^p (X_j^2 + Y_j^2) - \sum_{j=p+1}^n (X_j^2 + Y_j^2).$$

En este trabajo determinamos explícitamente la solución fundamental de los operadores  $\mathcal{L} + i\alpha T$ , con  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Probamos que la solución fundamental  $\Phi_\alpha$  se descompone como  $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha^1 + \Phi_\alpha^2$ , con  $\Phi_\alpha^2$  soportada en  $\{z \in \mathbb{C} : B(z) = 0\}$ , y calculamos

$$\Phi_\alpha^1 = \left( \frac{1}{(B(z) + 4it)^{\frac{n-\alpha}{2}}} \frac{1}{(B(z) - 4it)^{\frac{n+lpha}{2}}} \right) (C_0 \chi_{B(z) \geq 0} + \widetilde{C}_0 \chi_{B(z) < 0}),$$

donde  $C_0$  y  $\widetilde{C}_0$  están explícitamente calculadas. En el caso  $p = n$ ,  $q = 0$  recordamos la solución obtenida por Folland-Stein en [F-S]. El caso  $p, q$  arbitrario,  $\alpha = 0$  fue obtenido por Godoy-Saal en [G-S].

[F-S] G. B. Folland, E. M. Stein, *Estimates for the  $\bar{\partial}_b$  complex and analysis on the Heisenberg group*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXVII, nro. 4, págs. 429 - 522.

[G-S] T. Godoy, L. Saal, *On The Relative Fundamental Solutions For A Second Order Differential Operator On The Heisenberg Group*, Studia Mathematica, Vol.145, nro.1, págs. 143 - 164.

---

### Conferencia Invitada

S. Simondi

Instituto de Ciencias Básicas. UNCuyo

---

Conjuntos fundamentales de soluciones de las ecuaciones hipergeométricas matriciales generalizadas

La ecuación diferencial matricial hipergeométrica

$$z(1-z)F''(z) + (C - z(A+B+1))F'(z) - ABF(z) = 0$$

y la función hipergeométrica matricial de Gauss  ${}_2F_1 \left( \begin{smallmatrix} A; \\ C \end{smallmatrix}; B; z \right)$ , donde  $A, B$  y  $C$  son matrices complejas en  $\mathbb{C}^{r \times r}$  y  $F$  es una función compleja con valores en  $\mathbb{C}^r$ , fueron introducidas por J. Tirao en [Ti]. En [RS] extendimos naturalmente el número de parámetros de la ecuación diferencial hipergeométrica

obteniendo

$$z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} + B_1 - 1 \right) \left( z \frac{d}{dz} + B_2 - 1 \right) \dots \left( z \frac{d}{dz} + B_m - 1 \right) F(z) - z \left( z \frac{d}{dz} + A_1 \right) \left( z \frac{d}{dz} + A_2 \right) \dots \left( z \frac{d}{dz} + A_n \right) F(z) = 0, (1)$$

donde  $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathbb{C}^{r \times r}$  y para determinar un conjunto fundamental de soluciones alrededor de su punto singular regular  $z = 0$ , definimos las funciones hipergeométricas matriciales generalizadas  ${}_nF_m \left( \begin{matrix} A_1; \dots; A_n \\ B_1; \dots; B_m \end{matrix}; z \right)$ .

El objetivo de este trabajo es estudiar las soluciones de (1) alrededor del punto singular regular infinito y presentar los conjuntos fundamentales de soluciones hallados en [RS2]. Además, presentaremos algunas propiedades básicas de las funciones  ${}_nF_m$ , que son generalizaciones de las funciones hipergeométricas clásicas.

[RS] P. Román, S. Simondi, *The Generalized Matrix Valued Hypergeometric Equation*, Internat. J. of Math. 21 (2) (2010) 145-155.

[RS2] P. Román, S. Simondi, *Solutions at infinity of the generalized matrix-valued hypergeometric equation*, Applied Math Lettes. 23 (2010) 39-43.

[Ti] T. Tirao, *The matrix-valued hypergeometric equation*, Proc. Natl Acad. Sci U.S.A. 100 (14) (2003) 8138-8141.

---

**Autores:** Leandro Roberto Cagliero, Mónica Nancy Cruz

**Lugar:** Facultad de Matemática Astronomía y Física (Universidad Nacional de Córdoba) - Facultad de Ciencias Exactas (Universidad Nacional de Salta)

**Expositor:** Mónica Nancy Cruz

---

Sobre la Conjetura del Rango Toral en álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas

Hace más de 25 años Halperin [Hal] formuló la siguiente conjetura: Sea  $\mathfrak{n}$  un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y sea  $\mathfrak{z}$  el centro de  $\mathfrak{n}$ , entonces

$$\dim(H^*(\mathfrak{n})) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}.$$

Esta conjetura permanece abierta en general y sólo ha sido demostrada para ciertas clases de álgebras de Lie nilpotentes. Por ejemplo se sabe que es verdadera si  $\mathfrak{n}$  es 2-pasos nilpotente o si  $\mathfrak{n}$  es metabeliana split.

Esta conjetura tiene origen en la geometría. El rango total  $r(X)$  de una variedad diferenciable  $X$  es la dimensión del mayor toro que actúa en  $X$  libremente. Originalmente la conjetura afirma que  $\dim H^*(X) \geq 2^{r(X)}$ . Por un famoso teorema de Nomizu, la conjetura original se reduce a la versión algebraica cuando  $X$  es una nilvariedad.

Cuando el  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$  es álgebra de Lie  $k$ -pasos nilpotente y graduada, P. Tirao demuestra en [T1] que

$$\dim(H_*(\mathfrak{n})) \geq L(p)$$

donde  $p(x) = (1-x)^{\dim \mathfrak{n}_1} \dots (1-x^k)^{\dim \mathfrak{n}_k}$  y  $L(p)$  es la suma de los valores absolutos de los coeficientes de  $p$ . En particular, la CRT es verdadera para toda  $\mathfrak{n}$  nilpotente que admita una graduación tal que  $L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{s})}$ . No es difícil ver que este argumento funciona para toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente.

Los principales resultados de este trabajo son:

1. Demostramos que si  $\mathfrak{n}$  es 3-pasos nilpotente graduada y  $\dim \mathfrak{n} \leq 22$ , entonces  $L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{s})}$  y por lo tanto  $\mathfrak{n}$  satisface la CRT.
2. Verificamos computacionalmente que lo afirmado anteriormente es verdadero si  $\dim \mathfrak{n} < 100$ .
3. Encontramos una familia de álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas, tal que para toda  $\mathfrak{n}$  en esa familia se cumple que  $L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{s})}$ . La mínima dimensión que aparece en esta familia es 212. No sabemos si estas álgebras de Lie satisfacen la CRT.

Halperin S., *Rational homotopy and torus actions*, Aspects of Topology in London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol.93 (1985), 357-366.

Tirao P., *On the homology of graded Lie algebras*, Jour. of Pure and Applied Alg., 156(2001), 357-366.

---

**Autores: Carina Boyallian, Vanesa Meinardi**

**Lugar: FaMAF (UNC)**

**Expositor: Vanesa Meinardi**

---

Representaciones de peso máximo cuasifinito irreducible de  $W_\infty^N$

En este artículo clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducible de la subálgebra de Lie  $W_\infty^N$  de el álgebra de Lie de operadores matriciales en el círculo. También los realizamos en términos de la teoría de representaciones de la álgebra de Lie compleja  $g\ell_\infty^{[m]}$  de matrices infinitas con

un número finito de diagonales no nulas con entradas en el álgebra de polinomios truncados.

C. Boyallian, V. Kac, J. Liberati and C. Yan, *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, Journal of Math. Phys. **39** (1998), 2910-2928.

V. G. Kac and J. I. Liberati, *Unitary quasifinite representations of  $W_\infty$* , Letters Math. Phys. , **53** (2000), 11-27.

V. G. Kac and A. Radul, *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle*, Comm. Math. Phys. **157** (1993), 429-457.

---

**Autores: Leandro Cagliero, Nadina Rojas**

**Lugar: FaMAF - FaCEFYN**

**Expositor: Nadina Rojas**

---

Una cota inferior para las representaciones fieles de dimensión finita de álgebras de Lie nilpotentes

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo  $k$  de característica cero y sea

$$\mu(\mathfrak{g}) = \min\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

Por el Teorema de Ado, sabemos que el invariante  $\mu(\mathfrak{g})$  es finito, este invariante tiene importantes aplicaciones a la geometría diferencial. En general dada un álgebra de Lie concreta, o una familia de álgebras de Lie, no es sencillo calcular el valor o una cota para  $\mu$ .

Sea  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  es el centro de  $\mathfrak{g}$ . Para las álgebras de Lie nilpotentes tal que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  una cota inferior fácil de obtener para  $\mu(\mathfrak{g})$  es  $\lceil \sqrt{2 \dim \mathfrak{g}} \rceil \leq \mu(\mathfrak{g})$ .

En este trabajo bosquejamos la prueba del siguiente teorema

**Teorema.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie  $k+1$ -pasos nilpotente entonces*

$$\mu(\mathfrak{g}) \geq \left\lceil \sqrt{\frac{2(k+2)}{k+1} \dim \mathfrak{g}} \right\rceil.$$

De este teorema desprenderemos el valor de  $\mu$  para ciertas álgebras de Lie nilpotentes y una aplicación para las álgebras de dimensión finita sobre  $k$  que satisfacen la siguiente identidad polinomial

$$(1) \quad [x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_q, y_q] = 0$$

para algún entero positivo  $q$  (aquí  $[x, y] = xy - yx$ ).

Burde D. y Wolfgang, M., *Minimal Faithful Representations of Reductive Lie Algebras*, Arch. Math. **309**(2007), 513-523.

Cagliero, L., Rojas, N., *Faithful representations of minimal dimension of current Heisenberg Lie algebras*. Int. J. Math. **20**(2009), 1347-1362.

Domokos M., *On the dimension of faithful modules over finite dimensional basic algebras*, Linear Algebra and its Applications, Vol. **365**(2003), 155-157.

W.A. Graaf, *Classification of 6-dimensional Lie algebras over fields of characteristic not 2*. J. of Algebra **309**(2007), 640-653.

---

**Autores: Ana Sustar y Paulo Tirao**

**Lugar: FaMAF**

**Expositor: Ana Sustar**

---

### Estructura de nilradicales de subálgebras parabólicas

Dada un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita  $g$ ,  $h$  una subálgebra de Cartan y  $b$  una subálgebra de Borel, sea  $q$  una subálgebra parabólica que contiene a  $b$  y  $n$  su nilradical. Sabemos que  $q$  admite una única descomposición de Levi,  $q = m \oplus n$ , donde  $m$  es el factor de Levi de  $q$  (reductivo) y  $m$  contiene a  $h$ . Además  $m = t \oplus s$  donde  $t$  es el centro de  $m$  y  $s = [m, m]$  es la componente semisimple de  $m$ . Recientemente Kostant [K] introdujo un sistema de raíces para el factor de Levi formado por las restricciones de las raíces clásicas a  $t$ . En ese trabajo prueba la irreducibilidad de los espacios raíces como  $s$  y como  $m$ -módulos por la acción adjunta. Basado en esto obtiene varios resultados sobre la estructura del nilradical  $n$ .

En esta charla mostraremos cuáles son los pesos máximos de los espacios raíces como representaciones irreducibles de  $s$  en todos los casos. Cada espacio raíz es producto tensorial de representaciones irreducibles de los factores simples de  $s$ . Resulta que las representaciones que aparecen son muy pocas y distinguidas. Por ejemplo para el caso en el que  $g$  es de tipo  $A_n$ , sólo para dos factores simples de  $s$  la correspondiente representación irreducible es no trivial y éstas dos son representaciones fundamentales. Más aún las únicas fundamentales que aparecen son la primera y la última.

Estos resultados son parte del proyecto de axiomatización del sistema de raíces para el factor de Levi y están contenidos en [ST].

[K] Kostant B. *Root Systems for Levi Factors and Borel-de Siebenthal Theory*, Symmetry and Spaces: in Honor of Gerry Schwarz. Progress in Mathematics 278. Birkhäuser Boston. 2010.

[ST] Sustar A. y Tirao P., *On  $t$ -root systems for parabolic subalgebras*. En preparación.

---

**Autores: Inés Pacharoni, Juan Alfredo Tirao e Ignacio Zurrián**

**Lugar: FaMAF - UNC**

**Expositor: Ignacio Zurrián**

---

### Funciones esféricas y polinomios ortogonales en la tres-esfera

Se introducirá el concepto de función esférica matricial de un  $K$ -tipo asociado a un par  $(G, K)$ . Luego se explicará cómo hemos conseguido determinarlas a todas en el caso  $(G, K) = (\mathrm{SO}(4), \mathrm{SO}(3))$ , cuál es el rol de la función esférica auxiliar y cómo conseguimos reducir un par de sistemas de ecuaciones diferenciales acoplados de tres variables a ecuaciones diferenciales de sólo una variable, involucrando en el proceso a los polinomios de Hahn, para luego obtener como soluciones vectores cuyas entradas son múltiplos de polinomios de Gegenbauer, donde estos múltiplos satisfacen una relación recursiva de tres términos. Posteriormente, usando la teoría de representaciones, caracterizamos explícitamente las funciones esféricas sobre  $S^3 \simeq \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3)$ . Por otro lado, y para finalizar, conseguimos simultáneamente hipergeometrizar los operadores diferenciales matriciales correspondientes a las antes mencionadas ecuaciones para luego crear una sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociadas a un operador  $D$  y a un peso  $W$ .

# Teoría de Probabilidad

*Organizan:*

*Inés Armendáriz y Pablo Ferrari*



**Conferencia Invitada**  
**Matthieu Jonckheere**  
**CONICET**

---

Scheduling in wireless data systems: stability and asymptotic optimality

We investigate the scheduling of a common resource between several concurrent users when the feasible transmission rate varies over time (as an i.i.d. sequence). Time is slotted and users arrive and depart upon service completion. As performance criteria we consider the stability of the system and the mean delay experienced by the users. Given the complexity of the problem we investigate the fluid-scaled system. Contrary to many previous work studying the weak limits of the scaled process, we prove a strong convergence result allowing us to differentiate between known policies and to obtain important results and insights for the original system:

1. We characterize for a large class of scheduling policies the stability conditions and identify a set of maximum stable policies, giving in each time slot preference to users being in their best possible channel condition. We find in particular that many opportunistic scheduling policies like Score-Based, Proportionally Best or Potential Improvement are stable under the maximum stability conditions, whereas other popular policies like Relative-Best or the  $c\mu$ -rule are not.
2. We show that choosing the right tie-breaking rule is crucial for the performance (e.g. average delay) as perceived by a user. We prove that a policy is asymptotically optimal if it is maximum stable *and* if the tie-breaking rule gives priority to the user with the highest departure probability.
3. We derive the growth rates of the number of users in the system in overload settings, which gives additional insights on the performance of the system under various policies.
4. We conclude that simple priority-index policies with a  $c\mu$  tie-breaking rule, are stable and asymptotically optimal. All our findings are validated with extensive numerical experiments.

Joint work with U. Ayesta (BCAM), M. Erousquin (UPV Bilbao), M. Verloop (BCAM).

**Autores: Sebastián Grynberg**  
**Lugar: FI-UBA**  
**Expositor: Sebastián Grynberg**

---

#### Subcriticalidad en un modelo de percolación

Consideramos un proceso de Bernoulli de parámetro  $p$  sobre el reticulado entero  $d$ -dimensional. En cada sitio del proceso centramos una bola de radio aleatorio y consideramos la unión de todas las bolas (con la norma Manhattan). Los radios son independientes e independientes del proceso de Bernoulli. Tratamos de dar condiciones sobre el comportamiento de los radios que garanticen que para valores suficientemente pequeños del parámetro  $p$  la componente conexa del origen sea finita casi seguramente.

Trabajo conjunto con Cristian Coletti.

---

**Conferencia Invitada**  
**Mariela Sued**  
**FCEN-UBA**

---

#### Modelos Causales Gráficos: presentación y nuevas propuestas para identificar distribuciones contrafactuales

En el marco de la inferencia causal, los parámetros de interés a ser estimados dependen de la distribución de variables aleatorias que no son observadas en todos los individuos (variables contrafactuales).

Identificar dichos parámetros a partir de la distribución de las variables observadas es una condición necesaria para estimarlos en forma consistente.

En esta charla comenzaremos presentando parte del trabajo realizado por Pearl y sus colaboradores, quienes han desarrollado una serie de métodos gráficos que permiten decidir si el parámetro causal de interés es identificable. En tales circunstancias, además, los autores brindan fórmulas para los parámetros de interés en función de la distribución de las variables observadas.

Las hipótesis de identificabilidad suelen involucrar independencias condicionales. Estas son estudiadas con la ayuda de métodos gráficos, que utilizan grafos cuyos nodos representan a las variables aleatorias involucradas en el experimento, mientras que el análisis de los caminos en el grafo permite

deducir independencias e independencias condicionales entre las variables representadas por el grafo.

Por último, presentaremos una propuesta en la que estamos trabajando para verificar las condiciones necesarias para identificabilidad en estudios longitudinales.

Trabajo conjunto con Julieta Molina (FCEN, Universidad de Buenos Aires).

---

**Autores:** Juan Miguel Medina, Bruno Cernuschi Frías

**Lugar:** U.B.A. y I.A.M. CONICET

**Expositor:** Juan Miguel Medina

---

#### Wavelet expansion of some stable random processes

For a symmetric  $\gamma$ -stable,  $\gamma \in [1, 2]$  random measure  $M$  over  $\mathbb{R}$ , with finite absolutely continuous control measure  $d\mu = w dx$ , given  $f \in L^\gamma(\mathbb{R}, dx)$ , we define the process

$$Y(x) = \int_{\mathbb{R}} I_\alpha(f)(x-t) dM(t).$$

Where  $I_\alpha(\cdot)$  is the Riesz fractional integration operator of order  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Let  $\mathcal{G}(Y) \subset \mathbb{R}^2$  be the graph of  $Y$ . We prove that, for appropriate  $\gamma$  and  $\alpha$ , the Hausdorff dimension of  $\mathcal{G}(Y)$ , verifies  $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}(Y)) \leq 1 + \frac{2}{\gamma} - \alpha$  a.s.. Moreover this process has the following local behaviour: Let  $B$  a ball for which,  $\mu(B) > 0$ , and there exists a constant  $c > 0$  such that  $f > c$  a.e. over  $B$ , then the restricted graph verifies:  $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}(Y|_B)) = 1 + \frac{2}{\gamma} - \alpha$ .

For this processes, we study the convergence of its wavelet and multiresolution expansions. More precisely, we prove that if the wavelets are associated to a MRA, with scale functions  $\phi$  such that there exists a bounded integrable radial function  $\eta$ , such that  $|\phi| \leq \eta$  a.e. Then if  $Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) dM(t)$ , the series  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} I_\alpha(\phi_{k,j})(x)$  and  $\sum_{m \leq j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_\alpha(\psi_{k,m})(x)$  converges in the mean to  $Y$  as  $j \rightarrow \infty$ . Under suitable conditions this convergences is also, with probability one.

**Autores:** Sergio López Ortega  
**Lugar:** UNAM-México  
**Expositor:** Sergio López Ortega

---

#### Acoplamiento de difusiones

La técnica del coupling (o acoplamiento) es una herramienta general y poderosa que se utiliza actualmente en diversas áreas de la probabilidad. En esta charla hablaremos brevemente de qué es el coupling, cómo se observa en el ámbito de las difusiones (procesos estocásticos markovianos y continuos), qué tipo de resultados se han obtenido o se pueden esperar con la técnica, y algunos ejemplos; entre ellos uno relacionado con mis estudios de doctorado: la dinámica de Mountford-Prabahkar en el caso continuo.

1. K. Burzdy, Z. Chen. Coalescence of synchronous couplings. *Probability Theory and Related Fields*, (2002).
2. K. Burzdy, Z. Chen, P. Jones. Synchronous couplings of reflected Brownian motions in smooth domains. *Illinois J. Math.*, Doob, (2006).
3. W. Kendall. Brownian Couplings, Convexity and Shyness. *Elect. Comm. in Probab.* 14, (2009).
4. T. Lindvall. *Lectures on the Coupling Method*. Wiley, (1992).
5. N. O'Connell, M. Yor. Brownian analogues of Burke's theorem. *Stochastic Processes and their Applications*, (2001).
6. T. Mountford and B. Prabahkar. On the Weak Convergence of Departures from an Infinite Series of  $M/M/1$  Queues. *Annals of Applied Probability*, (1995).

---

**Autores:** Pablo Rodríguez  
**Lugar:** ME, Universidade de São Paulo, Brasil  
**Expositor:** Pablo Rodríguez

---

Generalización del modelo de Maki-Thompson para la difusión de un rumor

Maki y Thompson (1973) proponen un modelo estocástico para la difusión de un rumor en una población. En esta charla vamos a definir este modelo y mencionar los principales resultados existentes en la literatura. Finalmente, proponemos una generalización de este proceso y mostramos teoremas límites para la proporción final de individuos que nunca llega a conocer el rumor.

Trabajo en conjunto con Élcio Lebensztayn y Fabio Prates Machado (Universidade de São Paulo, Brasil).

---

**Conferencia Invitada**  
**Nora Muler**  
**UTDT**

---

Maximización de la probabilidad de supervivencia de una compañía de seguros permitiendo inversiones en bienes no líquidos

Modelamos la reserva de la compañía de seguros como un proceso de Poisson compuesto. Asumimos que la compañía tiene la posibilidad de invertir parte de la reserva en un bien no líquido mientras el resto se mantiene en efectivo. El objetivo del trabajo es encontrar una estrategia dinámica de inversión de la reserva en el bien no líquido de forma tal de maximizar la probabilidad de supervivencia de la compañía de seguros.

Caracterizamos la función de probabilidad de supervivencia óptima como la única solución viscosa de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman con límite uno en infinito.

Esta ecuación es integro-diferencial en dos variables, de orden uno y no lineal. La elección de inversión óptima en el bien no líquido está especificada por la llamada región de inactividad. Dentro de esa región, la reserva invertida en el bien no líquido debe mantenerse constante. Afuera de esa región, se debe invertir inmediatamente una cantidad de la reserva en el bien no líquido.

En el caso que el tamaño de los reclamos de la compañía tenga una distribución exponencial obtenemos la probabilidad de supervivencia óptima y encontramos una fórmula cerrada para la región de inactividad.

Trabajo conjunto con Pablo Azcue (UTDT).

**Autores:** Pablo Groisman, Pablo Ferrari, Rafael Grisi  
**Lugar:** FCEN-UBA  
**Expositor:** Pablo Groisman

---

Funciones armónicas en grafos aleatorios y paseos al azar en triangulaciones de Poisson-Delaunay

Consideramos un proceso de Poisson en el plano. A cada punto del proceso le asociamos su célula de Voronoi, dada por todos los puntos que están a menor (o igual) distancia de él que del resto de los puntos. En el grafo de Delaunay asociado dos puntos son vecinos si sus células de Voronoi tienen intersección no vacía. Un paseo al azar en este grafo es un proceso de Markov que en cada paso elige uno de sus vecinos con probabilidad uniforme y salta sobre él. El comportamiento asintótico de este paseo podría ser probado sin mayores dificultades si fuese una martingala (como es el caso de  $\mathbb{Z}^2$ ) pero en este caso con probabilidad uno no lo es. La principal herramienta entonces consiste en encontrar una deformación del grafo de modo tal que el paseo al azar en el grafo deformado resulte una martingala. Luego se requieren cotas para la deformación. Una función armónica en un grafo es una función definida en los puntos que cumple con la propiedad del valor medio. Veremos que estas funciones sirven para construir la deformación antes mencionada. Probaremos su existencia y comportamiento asintótico, que permitirá exportar cotas para la deformación y por ende, para el paseo al azar.

Es un trabajo conjunto con Pablo Ferrari y Rafael Grisi.

---

**Conferencia Invitada**  
**Leandro Pimentel**  
**UFRJ-Brasil**

---

How to compute the law of the asymptotic angle of a competition interface  
Assume that we have a collection  $\{X_{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2\}$  of i.i.d. exponential random variables of intensity one. For  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$  (coordinate-wise) let  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  denote the maximum, over all up-right nearest-neighbor paths  $\varpi$  connecting  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{y}$ , of the sum of  $X_{\mathbf{z}}$  along  $\varpi$  (leaving out  $\mathbf{x}$ ). Choose integers  $k, l \geq 1$  and define a coloring of  $\mathbb{Z}_+^2$  as follows: a point  $\mathbf{z}$  is colored blue if

$$L((-k, 0), \mathbf{z}) > L((0, -l), \mathbf{z})$$

and otherwise it is colored red. The *competition interface* is the up-right path that separates the blue and the red regions. It has been shown that a competition interface has an (a.s.) asymptotic angle  $\Theta_{k,l}$ , which will be random in this case. In this talk we will show that

$$\mathbb{P}(\Theta_{k,l} \leq \alpha) = \frac{1}{(l-1)!} \left( \frac{\sqrt{\tan \alpha}}{1 + \sqrt{\tan \alpha}} \right)^l \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(j+l-1)!}{j!} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{\tan \alpha}} \right)^j.$$

This is joint work with Eric Cator - Delft University of Technology, The Netherlands.

---

**Autores:** José M. Bavio, Melina V. Guardiola y Ana C. Tablar  
**Lugar:** UNS -Dto. Matemática  
**Expositor:** Ana C. Tablar

---

#### Teorema Central del Límite para Procesos Continuos 1-descomponibles

En diversos problemas referidos a estadística de procesos estocásticos de parámetro continuo, resulta de interés estudiar el comportamiento de

$$m_T(X; A) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_A X_s ds,$$

donde  $A$  es un conjunto asintóticamente medible y el proceso  $\{X_s, -\infty < s < \infty\}$  es de la forma  $X_s = \varphi(\xi_s, Y_s)$ , siendo  $\xi$  e  $Y$  dos fuentes aleatorias independientes y  $\varphi$  satisface ciertas condiciones de regularidad.

En este trabajo establecemos un teorema central del límite (TCL) para  $m_T(X; A)$  si se supone que  $\xi$  es estacionario, centrado y se cumple que para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $(y_1, \dots, y_k)$  vale un TCL para  $(\varphi(\xi, y_1), \dots, \varphi(\xi, y_k))$ , pero el proceso  $Y$  solamente satisface una ley de grandes números para  $(Y_r, Y_{r-s})_{r, s \in \mathbb{R}}$ . A la clase de procesos que satisface estas condiciones se las denominó 1-descomponible.

**Autores:** Ana Laura Maffei, Tomás Tetzlaff  
**Lugar:** Universidad Nacional de General Sarmiento  
**Expositor:** Ana Laura Maffei

---

Propiedades de un procedimiento de búsqueda evolutiva con diversidad

Presentamos un procedimiento de búsqueda estocástica evolutiva que consiste en una variante del algoritmo genético básico con la propiedad de mantener la diversidad cromosómica. Ésta se obtiene gracias al método de reemplazo de individuos, evitándose el problema de la homogeneización en un óptimo local. Probamos que el número de individuos repetidos nunca aumenta y que hay convergencia a un óptimo global en el sentido estocástico. Mostramos que el algoritmo converge a todos los máximos globales con la sola limitación del tamaño poblacional, aunque la convergencia a estos máximos no necesariamente es eficiente. Exponemos comparaciones con un procedimiento evolutivo canónico.

## Reunión Anual de la UMA 2011

La Reunión Anual de la UMA se realizará en la ciudad de San Miguel de Tucumán, del 20 al 23 de septiembre de 2011.

- LXI Reunión de Comunicaciones Científicas
- XXXIV Reunión de Educación Matemática
- XXIII Encuentro de Estudiantes de Matemática
- III Festival de Matemática

**Conferencistas invitados:** Alicia Dickenstein, Jair Koiller, Rubén Spies, Liliana Forzani, Jorge Antezana, Patricio Díaz Varela, Mónica Villarreal, Sara Scaglia, Pablo Lotito, Alejandro Petrovih.

**Comunicaciones REM:** envíos hasta el 31 de mayo.

**Comunicaciones UMA:** envíos hasta el 30 de junio.

**Becas para estudiantes:** solicitudes desde el 1 al 30 de junio.

**Monografía:** en próximos anuncios.

**Inscripción:**

- Hasta el 10 de agosto. Socios \$150; no socios \$250; alumnos \$70.
- Después del 10 de agosto. Socios \$200; no socios \$300; alumnos \$70.

**Sitio Web:** <http://www1.herrera.unt.edu.ar/uma2011/index.html>



## UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

### Comisión Directiva

- |                          |                                |
|--------------------------|--------------------------------|
| • Presidente             | <b>Hernán Cendra</b>           |
| • Vicepresidente Primero | <b>Hugo Aimar</b>              |
| • Vicepresidente Segundo | <b>Nicolás Andruskiewitsch</b> |
| • Secretario             | <b>Beatriz Marrón</b>          |
| • Prosecretario          | <b>Walter Reartes</b>          |
| • Tesorero               | <b>Rosana Entizne</b>          |
| • Protesorero            | <b>Sebastián Ferraro</b>       |

Dirección postal: UMA - Departamento de Matemática  
Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253  
B8000CPB Bahía Blanca  
Buenos Aires  
Argentina

Tel.: +54-291-4595101 (int. 3417)

Fax: +54-291-4595163

E-mail: [uma@union-matematica.org.ar](mailto:uma@union-matematica.org.ar)

Sitio web: <http://www.union-matematica.org.ar>

### Secretarios Locales

Está de más decir que es muy importante que mantengamos frecuente comunicación con nuestros secretarios/as locales, los invitamos a acercar sugerencias e inquietudes a través de ellos también. Aquí dejamos sus datos de contacto.

**Marta Casamitjana**  
Depto. de Matemática  
Universidad Nacional del Sur  
Avda. Alem 1253  
8000 BAHÍA BLANCA  
martavirkel@hotmail.com

**Graciela Fernández**  
Depto. de Matemática - FCEyN  
Universidad de Buenos Aires  
Pab. I Ciudad Universitaria  
1428 CAPITAL FEDERAL  
uma-ba@dm.uba.ar

**Gustavo Juarez**  
B° Avellaneda y Tula - Casa n° 102  
4700 CATAMARCA  
uma@decatamarca.net.ar

**María Mendonça**  
San Martín 1426  
9000 COMODORO RIVADAVIA  
mendonca@ing.unp.edu.ar

**Germán Torres**  
FaMAF - Ciudad Universitaria  
M. Allende y Haya de la Torre  
5000 CÓRDOBA  
torres@mate.uncor.edu

**Rubén Cerutti**  
Depto. de Matemática- FCEyN - UNNE  
9 de Julio 1449  
3400 CORRIENTES  
rcerutti@exa.unne.edu.ar

**Liliana de Zaragoza**  
Juan B. Justo 441  
5501 GODOY CRUZ (Mza.)  
lzaragoz@fcemail.uncu.edu.ar

**Nydia Dal Bianco**  
Fac. Cs. Exactas y Naturales  
Uruguay 151  
6300 Santa Rosa - LA PAMPA  
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar

**Adriana Galli**  
Depto. Matemática  
Fac. Cs. Exactas - UNLP  
Calle 47 y 115- 1900 LA PLATA  
adriana@mate.unlp.edu.ar

**Guillermo Valdéz**  
Funes 3250  
7600 MAR DEL PLATA  
gvaldez@mdp.edu.ar

**Mercedes Heredia**  
Lavalle y Alem  
4440 METÁN  
SALTA

**Cristina Cano**  
Depto. de Matemática  
Fac. de Economía - UNCo  
Buenos Aires 1400  
8300 NEUQUÉN  
cbcانو@uncoma.edu.ar

**Víctor Wall**

Facultad de Cs. Exactas,  
Químicas y Naturales - UNAM  
Entre Ríos 2419  
3300 POSADAS  
matemat@fceqyn.unam.edu.ar

**María Cristina Sanziel**

Fac. de Ciencias Exactas  
Ingeniería y Agrimensura - UNR  
Av. Pellegrini 250  
2000 ROSARIO  
sanziel@fceia.unr.edu.ar

**Virginia Montoro**

Centro Regional Univer. Bariloche  
Quintral 1250  
8400 S. C. DE BARILOCHE  
vmontoro@crub.uncoma.edu.ar

**Bárbara Bajuk**

Depto. de Matemática - UNSL  
Ejército de los Andes 950  
5700 SAN LUIS  
bbajuk@unsl.edu.ar

**Stella Maris Vaira**

Depto. Matemática - FBCB - UNL  
Pje. El Pozo - Cdad. Universitaria  
3000 SANTA FE  
svaira@fbc.b.unl.edu.ar

**Marta García**

FCE-UNCPBA  
Campus Universitario  
Paraje Arroyo Seco  
7000 TANDIL  
mgarcia@exa.unicen.edu.ar

**Marcela Lazarte**

Pje. Roca 4369  
4000 TUCUMÁN  
mlazarte@herrera.unt.edu.ar

**Adriana M. González**

Depto. de Matemática  
Fac. de Ciencias Exactas - UNRC  
Ruta 36 Km 601  
X5804ZAB RÍO CUARTO (Cba.)  
agonzalez@exa.unrc.edu.ar

**Eudisia (Nena) Diaz de Hibbard**

Depto. de Matemática  
Fac. de Ciencias Exactas - UNSa  
Buenos Aires 177  
4400 SALTA  
endh@unsa.edu.ar

**Delfina Femenia**

FFHA - UN de San Juan  
Av. Ignacio de la Roza 230(O)  
5400 SAN JUAN  
delfinafemenia@speedy.com.ar

**Ana Benavente**

Depto. de Matemática - UNSL  
Ejército de los Andes 950  
5700 SAN LUIS  
abenaven@unsl.edu.ar

**Ismael Gómez**

Depto. de Matemática - FCE  
UN de Santiago del Estero  
4200 SANTIAGO DEL ESTERO  
jgomez@unse.edu.ar

**Susana Gloria González de Quevedo**

Fac. de Ingeniería  
UN de la Patagonia  
Belgrano 504 - 2º p.  
9100 TRELEW CHUBUT  
susanaquevedo@speedy.com.ar

**Ricardo Zalik**

221 Parker Hall,  
Department of Mathematics and Statistics  
ALABAMA 36849-5310 USA  
zalik@auburn.edu

## Publicaciones

### Revista de la Unión Matemática Argentina

ISSN 0041-6932

Correo electrónico: [revuma@criba.edu.ar](mailto:revuma@criba.edu.ar)

Sitio web: <http://inmabb.criba.edu.ar/revuma/>

Dirección postal: Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253  
B8000CPB Bahía Blanca - Argentina

- **Director**  
Luis A. Piovan
- **Vice-directores**  
Jorge Lauret, María Julia Redondo, Ignacio Viglizzo

### Revista de Educación Matemática

ISSN N° 0326-8780

ISSN N° 1852-2882 (en línea)

Correo electrónico: [revm@famaf.unc.edu.ar](mailto:revm@famaf.unc.edu.ar)

Sitio web: [http://www.famaf.unc.edu.ar/rev\\_edu/](http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/)

Dirección postal: FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba  
M. Allende y Haya de la Torre  
Ciudad Universitaria  
5000 Córdoba, Argentina.

- **Director**  
Jorge Vargas
- **Vice-directora**  
Carina Boyallian
- **Secretario Ejecutivo**  
Bernardino Audisio
- **Secretaria de Edición**  
Luisa I. Gallardo

**Noticiero de la Unión Matemática Argentina**

Versión impresa: ISSN 1514 - 9560

Versión electrónica: ISSN 1514 - 9595

Correo electrónico: [noticiero.uma@gmail.com](mailto:noticiero.uma@gmail.com)

Sitio web: <http://www.notiuma.santafe-conicet.gov.ar>

Dirección postal: Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)  
Güemes 3450  
S3000GLN Santa Fe, Argentina.

■ **Editores**

Fernando Gaspoz, Ivana Gómez

■ **Colaboradores**

Marilina Carena, Silvia Hartzstein